Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 1, pp. 133-138

FRÉQUENCE DES MOTIFS DANS LES SUITES DOUBLES INVARIANTES PAR UNE SUBSTITUTION

Jacques Peyrière

Des règles d'auto-similarité conduisent à la construction d'ensembles fractals par interpolation vers les petites échelles. Si, au contraire, on interpole vers vers les grandes, on obtient des réseaux fractals ou, si l'on se place dans un cadre abstrait, des graphes auto-similaires. Les livres de B. Mandelbrot et en particulier le dernier [5] donnent une profusion d'exemples de tels objets et montrent leur extrême pertinence à la description du monde physique.

On peut montrer [11] que dans un graphe auto-similaire les motifs bornés apparaissent avec une densité uniforme. La démonstration de ce résultat est alourdie par le formalisme qu'il est nécessaire d'introduire pour traiter en une seule fois une grande variété de situations comprenant les squigs de Mandelbrot [6,7,16,17], les réseaux hiérarchiques à la Sierpinski et les pavages de Penrose [3,9,10]. Nous traitons ici le cas particulier, notablement plus simple, où l'on travaille sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Considérons un ensemble fini A, que nous appellerons alphabet, et deux entiers p et q supérieurs ou égaux à 2. Donnons-nous une application σ de A dans l'ensemble des tableaux d'éléments de A indexés par $\{0,1,\dots,p-1\} \times \{0,1,\dots,q-1\}$.

Etendons l'opération σ aux tableaux rectangulaires, finis ou non, d'éléments de A de la forme suivante:

si $x = (x_{i,j})_{0\le i<m, 0\le j<n}$ le tableau $\sigma(x)$ est défini par les relations

$$\sigma(x)_{pi+r,qj+s} = (\sigma(x_{i,j}))_{r,s}$$

où $0 \le i < m$, $0 \le j < n$, $0 \le r < p$, $0 \le s < q$. Autrement dit, on obtient $\sigma(x)$ en remplaçant chaque lettre de x par une matrice $p \times q$.

A chaque tableau fini x d'éléments de A, on associe le vecteur $L(x)$ de $\mathbb{R}^A$ dont la a-ième composante est le nombre de fois que la lettre a figure dans x. On associe à σ la matrice carrée M, indexée par $A \times A$, dont la b-ième colonne est le vecteur $L(\sigma(b))$. Alors, pour tout tableau fini x, on a $L(\sigma(x)) = ML(x)$.

Si x est un tableau, $|x|$ en désigne le nombre d'éléments; si ξ est un vecteur, $|\xi|$ désigne la somme des valeurs absolues de ses composantes.

Lorsque la matrice M est primitive, c'est-à-dire lorsqu'une de ses puissances a tous ses coefficients strictement positifs, nous dirons que la substitution σ est primitive. Lorsqu'il en est ainsi, $\lambda = pq$ est valeur propre simple de la matrice M et l'unique vecteur propre associé, ξ, dont la somme des composantes vaille 1, a toutes ses composantes strictement positives. Il résulte alors de la théorie de Perron-Frobenius que $L(\sigma^n(a))/|\sigma^n(a)|$ tend vers ξ lorsque n tend vers $+\infty$, et ceci quelle que soit la lettre a prise dans A. Plus précisément, il existe deux nombres C et λ_1 tels que l'on ait $C > 0$, $0 < \lambda_1 < \lambda$ et
$$\sup_{a\in A}\sup_{n\ge 0}\left|\frac{L(\sigma^n(a))}{|\sigma^n(a)|} - \xi\right| \le C\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^n.$$

S'il existe une lettre a telle que l'on ait $(\sigma(a))_{0,0} = a$, la suite des tableaux $\sigma^n(a)$ converge vers une suite double infinie, notée $\sigma^\infty(a)$, qui est invariante par la substitution σ. Nous allons étudier la fréquence des motifs dans une telle suite, sous l'hypothèse de primitivité de σ. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier plus attentivement la répartition des différentes lettres.

Si R est une partie du réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on en note $|R|$ le cardinal et l'on désigne par $\tau(R)$ l'ensemble des couples $(pi+r, qj+s)$ tels que l'on ait $(i,j) \in R$, $0 \le r < p$ et $0 \le s < q$. Le bord ∂R de R est l'ensemble des points de R dont au moins un des voisins n'appartient pas à R. En outre, si x est un tableau d'éléments de A, on note $L(R,x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^A$ dont la b-ième composante est le nombre des couples (i,j) appartenant à R et tels que l'on ait $x_{i,j} = b$.

Il résulte de ce qui précède que l'on a une estimation précise de $L(R,\sigma^\infty(a))/|R| - \xi$ lorsque R est de la forme $\{0,1,\ldots,p^n-1\} \times \{0,1,\ldots,q^n-1\}$. La proposition suivante donne une estimation de cette quantité pour R quelconque.

PROPOSITION. *On a*

$$\left|\frac{L(R,\sigma^\infty(a))}{|R|} - \xi\right| \leq C'\left(\frac{|\partial R|}{|R|}\right)^h$$

où $h = (\operatorname{Log}\frac{\lambda}{\lambda_1})/(\operatorname{Log}\frac{\lambda^2}{\lambda_1})$ *et* $C' = 2 + \frac{\lambda C}{\lambda_1}$.

DÉMONSTRATION. Soit j un nombre entier positif ou nul. Considérons la partie E de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, maximale pour l'inclusion, telle que $\tau^j E$ soit contenu dans R. Il existe un ensemble F dont le cardinal est inférieur ou égal à celui de ∂R tel que l'on ait $\tau^j E \subset R \subset \tau^j E \cup \tau^j F$. On a alors la suite d'inégalités, où l'on a posé $x = \sigma^\infty(a)$:

$$|L(R,x) - L(\tau^j E,x)| \leq \lambda^j |\partial R|$$

$$|L(\tau^j E,x) - \lambda^j |E|\xi| \leq C|E|\lambda_1^j$$

$$|L(R,x) - \lambda^j |E|\xi| \leq \lambda^j |\partial R| + C|E|\lambda_1^j$$

$$|L(R,x) - |R|\xi| \leq 2\lambda^j |\partial R| + C|E|\lambda_1^j$$

d'où

$$\left|\frac{L(R,x)}{|R|} - \xi\right| \leq C\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^j + 2\lambda^j \frac{|\partial R|}{|R|}.$$

On obtient le résultat annoncé en prenant pour j la partie entière du quotient $(\operatorname{Log}\frac{|R|}{|\partial R|})/(\operatorname{Log}\frac{\lambda^2}{\lambda_1})$.

CONSÉQUENCE. Si $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de parties finies de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telles que $|\partial R_n|/|R_n|$ tende vers 0, alors le rapport $L(R_n,\sigma^\infty(a))/|R_n|$ converge vers ξ. Il en résulte que les diverses lettres apparaissent dans $\sigma^\infty(a)$ avec des densités uniformes.

Pour étudier les fréquences d'apparition des motifs bornés dans $\sigma^{(\infty)}(a)$, on se ramène à la situation précédente par des changements d'alphabet comme nous allons l'expliquer.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Désignons par A_k l'ensemble des tableaux rectangulaires d'éléments de A dont les dimensions sont inférieures ou égales à k. Si $x = (x_{i,j})_{0\leq i<m,0\leq j<n}$ est un tableau d'éléments de A, on note $\rho_k(x)$ le tableau d'éléments de A_k ainsi défini:

$$(\rho_k(x))_{i,j} = (x_{i+r,j+s})_{0\leq r<\inf(k,m-i),0\leq s<\inf(k,n-j)}.$$

Il est facile de donner des règles de substitution σ_k sur l'alphabet A_k de façon que l'on ait $\sigma_k(\rho_k(x)) = \rho_k(\sigma(x))$ pour tout tableau x d'éléments de A:

si $x\in A_k$ et si $\rho_k\sigma(x) = (y_{i,j})_{0\leq i<m,0\leq j<n}$, alors on pose

$$\sigma_k(x) = (y_{i,j})_{0\leq i<p,0\leq j<q}.$$

Si l'on veut étudier la fréquence d'apparition d'un élément de A_k, nous nous retrouvons donc dans la situation de départ à ceci près que, même si σ est primitive, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit de même de σ_k. Cela est dû au fait que le nouvel alphabet est trop gros. En effet, nombre d'éléments de A_k peuvent n'apparaître dans aucun des tableaux $\rho_k(\sigma^n(a))$ $(n\geq 0)$. Soit donc B_k l'ensemble des éléments de A_k qui apparaissent dans l'un des tableaux $\rho_k(\sigma^n(a))$ $(n\geq 0)$. Notons B'_k l'ensemble des éléments de B_k qui correspondent à des tableaux d'éléments de A, carrés d'ordre k. Soit B''_k le complémentaire de B'_k dans B_k. Si la substitution σ est primitive et si $(\sigma(a))_{0,0} = a$, on peut établir facilement les faits suivants:

1^o si $x \in B'_k$ le tableau $\sigma_k x$ est composé de lettres de B'_k et la substitution σ'_k que σ_k définit par restriction à B'_k est primitive,

2^o $\rho_k(\sigma^\infty(a))$ est un point fixe de σ'_k.

Il en résulte, comme annoncé, que tout élément de B'_k apparaît dans $\sigma^\infty(a)$ avec une densité uniforme.

Il y a d'autres situations que l'on peut traiter de façon similaire: par exemple en se donnant des règles de substitutions par des tableaux triangulaires on peut définir des colorations automatiques du pavage triangulaire régulier du plan donnant lieu à l'apparition de chaque motif avec une densité uniforme. Mais la situation générale nécessite le traitement donné dans [11].

Le cas unidimensionnel, c'est-à-dire celui des suites automatiques, ou plus généralement des suites associées à une substitution, a été étudié de différents points de vue par plusieurs auteurs [1,2,4,14,15].

Bibliographie

[1] CHRISTOL, G., KAMAE, T., MENDÈS FRANCE, M., RAUZY, G., *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 108(1980), 401.

[2] DEKKING, F.M., *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Z. Wahr. Verw. Geb. 41(1978), 221-239.

[3] GARDNER, M., *Extraordinary non periodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American 236(1977), 110.

[4] KEANE, M., *Generalized Morse sequences*, Z. Wahr. Verw. Geb. 10(1968), 335.

[5] MANDELBROT, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.

[6] MANDELBROT, B., *Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals*, C.R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 933-936.

[7] MANDELBROT, B., *Fractals in Physics: squig clusters, diffusions, fractal measures...*, J. Stat. Phys. 34(1984), 895-930.

[8] MANDELBROT, B., *Squig sheets and some other squig fractal constructions...*, J. Stat. Phys. 36(1984), 519-545.

[9] PENROSE, R., *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl. 10(1974), 266.

[10] PENROSE, R., *Pentaplexity*, Math. Intelligencer 2(1979), 32.

[11] PEYRIÈRE, J., *Frequency of patterns in certain graphs and in Penrose tilings*, J. de Physique, Colloque C3, Supplément au no 7, tome 47, juillet 1986, pp. C3-41 à C3-62.

[12] PEYRIÈRE, J., *Processus de naissance avec interaction des voisins*, C.R. Acad. Sc. Paris 289(1979), 223-224 et 557.

[13] PEYRIÈRE, J., *Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes*, Ann. Inst. Fourier XXXI(1981), 187-218.

[14] PEYRIÈRE, J., *Substitutions aléatoires itérées*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1980-1981.

[15] QUEFFÉLEC, M., *Contributions à l'étude spectrale des suites arithmétiques*, Thèse, Université de Paris-Nord, 1984.

[16] Wen Zhi-Ying, *Théorèmes limites pour certains processus de naissance*, Bull. Soc. Math. France 114(1986), 403-430.

[17] Wen Zhi-Ying, *Etude de certains processus de naissance*, Thèse, Orsay, 1986.

Département de mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY, France

Manuscrit reçu le 9 septembre 1986.