

# Endomorphismes de certaines algèbres à identités polynomiales

Jacques PEYRIÈRE <sup>a</sup>, Zhi-Xiong WEN <sup>b</sup>, Zhi-Ying WEN <sup>c</sup>

<sup>a</sup> CNRS, UMR 8628, Mathématiques, bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France  
Courriel : Jacques.Peyriere@math.u-psud.fr

<sup>b</sup> Department of Mathematics, Wuhan University, Wuhan 430072, The People's Republic of China  
Courriel : zhxwen@dns.whu.edu.cn

<sup>c</sup> Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing 100084, The People's Republic of China  
Courriel : wenzy@tsinghua.edu.cn

(Reçu le 17 avril 2000, accepté le 4 mai 2000)

---

## Résumé.

Horowitz [2] a défini une application du groupe libre  $\Gamma$  de rang  $n$  dans un quotient  $\mathcal{R}$  de l'anneau des polynômes en  $2^n - 1$  variables à coefficients entiers de façon que la valeur de cette application (un caractère de Fricke) en un point  $w$  permette le calcul de la valeur en  $w$  du caractère de toute représentation de  $\Gamma$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . Il a aussi montré [3] qu'un endomorphisme de  $\Gamma$  induit un endomorphisme de  $\mathcal{R}$ . Un moyen de calculer ces caractères de Fricke est de se placer dans une algèbre  $\mathcal{A}$  à identité polynomiale universelle pour la situation  $\Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ . Tout endomorphisme de  $\Gamma$  en induit un de  $\mathcal{A}$ . Nous montrons qu'en rang 2 certaines des propriétés des endomorphismes de  $\mathcal{A}$  provenant d'endomorphismes de  $\Gamma$  s'étendent à tous les endomorphismes. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Endomorphisms of certain algebras with polynomial identities*

## Abstract.

Horowitz [2] defined a mapping from a free group  $\Gamma$  of rank  $n$  into a quotient ring  $\mathcal{R}$  of a ring of polynomials on  $\mathbb{Z}$  with  $2^n - 1$  variables in such a way that the value of this mapping (a Fricke character) at a point  $w$  in  $\Gamma$  allows to compute the value at  $w$  of the character of any representation of  $\Gamma$  in  $SL(2, \mathbb{C})$ . He also showed [3] that an endomorphism of  $\Gamma$  induces an endomorphism of  $\mathcal{R}$ . A way of computing these Fricke characters is to consider a PI-algebra  $\mathcal{A}$  universal for the situation  $\Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  and perform computations in it. Any endomorphism of  $\Gamma$  induces an endomorphism of  $\mathcal{A}$ . In this work, we show that, in the case of rank 2, some properties of endomorphisms of  $\mathcal{A}$  coming from endomorphisms of  $\Gamma$  extend to all endomorphisms of  $\mathcal{A}$ . © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## 1. Introduction

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices  $2 \times 2$  sur un corps de caractéristique différente de 2. On sait [2] que la trace de tout produit  $\prod_{j=1}^k x_j$  où, pour tout  $j$ ,  $x_j \in \{A, B\}$  est un polynôme en les variables  $\text{tr } A$ ,  $\text{tr } B$ ,  $\text{tr } AB$ ,  $\det A$  et  $\det B$ .

---

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

Autrement dit, si  $w$  appartient au groupe libre  $\Gamma_{\langle a,b \rangle}$  engendré par  $a$  et  $b$ , il existe un unique polynôme  $P_w$  tel que, si  $\varphi$  est une représentation de  $\Gamma_{\langle a,b \rangle}$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$ , la trace de  $\varphi(w)$  soit égale à la valeur de  $P_w$  au point  $(\text{tr } \varphi(a), \text{tr } \varphi(b), \text{tr } \varphi(ab))$ . C'est ce que Horowitz [2] appelle les caractères de Fricke.

À chaque endomorphisme  $\sigma$  de  $\Gamma_{\langle a,b \rangle}$ , on associe [3] l'application polynomiale  $\Phi_\sigma = (P_{\sigma(a)}, P_{\sigma(b)}, P_{\sigma(ab)})$ . Considérons le polynôme  $\lambda = 4 + xyz - x^2 - y^2 - z^2$ . Puisque la relation  $\lambda(\text{tr } A, \text{tr } B, \text{tr } AB) = 0$  exprime que les matrices  $A$  et  $B$  ont une direction propre commune, pour tout  $\sigma$ , le polynôme  $\lambda \circ \Phi_\sigma$  est divisible par  $\lambda$  :  $\lambda \circ \Phi_\sigma = Q_\sigma \cdot \lambda$ . Nous montrons ici que cette divisibilité résulte d'une identité ayant lieu dans un cadre plus général. Ces applications et leurs relations avec les automorphismes de groupes libres ont été étudiés notamment dans [3,4] et [5].

## 2. Des identités

Un moyen d'obtenir les polynômes  $P_w$  est de calculer dans des algèbres à identités polynomiales ([6] et [7]) dont voici la définition.

On considère les anneaux  $A = \mathbb{Z}[x, y, z, u, v]$  et  $A' = \mathbb{Z}(\frac{1}{2})[x, y, z, u, v]$ . On note  $\mathcal{A}$  la  $A$ -algèbre associative et unifère engendrée par  $a$  et  $b$  satisfaisant les relations :

$$a^2 - xa + u = 0, \quad b^2 - yb + v = 0 \quad \text{et} \quad ab + ba = z - xy + ya + xb$$

et  $\mathcal{A}'$  la  $A'$ -algèbre unifère engendrée par  $a$  et  $b$ .

Ces algèbres, considérées comme  $A$  ou  $A'$ -modules, ont pour base  $1, a, b$  et  $ab$ . Il est facile de vérifier que tout élément  $w$  de  $A$  ou  $A'$  a un polynôme minimal de degré au plus 2 :  $w^2 - \tau(w)w + \delta(w) = 0$ , où  $\tau(w)$  et  $\delta(w)$  appartiennent à  $A$  ou  $A'$ .

La forme  $A$  ou  $A'$ -linéaire  $\tau$  est une trace :  $\tau(w_1 w_2) = \tau(w_2 w_1)$ . On a  $\tau(1) = 2, \tau(a) = x, \tau(b) = y$  et  $\tau(ab) = z$ .

Nous appellerons évidemment  $\delta$  le déterminant, c'est une forme quadratique dont la matrice par rapport à la base  $1, a, b, ab$  est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & x & y & z \\ x & 2u & xy - z & uy \\ y & xy - z & 2v & vx \\ z & uy & vx & 2uv \end{pmatrix}.$$

On a  $\delta(w_1 w_2) = \delta(w_2 w_1) = \delta(w_1)\delta(w_2)$ . Le centre de ces algèbres est engendré par l'unité. Elles sont intègres : on montre que  $w = 0$  équivaut à  $\delta(w) = 0$ .

L'opération qui à  $w \in \mathcal{A}$  ou  $\mathcal{A}'$  associe  $w^* = \tau(w) - w$  est une involution. Elle a les propriétés suivantes :

$$\tau(w^*) = \tau(w), \quad \delta(w^*) = \delta(w), \quad (w_1 w_2)^* = w_2^* w_1^*, \quad w w^* = \delta(w) \quad \text{et} \quad \tau(w w^*) = 2\delta(w).$$

Comme  $A'$ -module,  $\mathcal{A}'$  admet la décomposition :  $\mathcal{A}' = A' \oplus \ker \tau$ , c'est-à-dire  $w = \frac{1}{2}\tau(w) + \frac{1}{2}(w - w^*)$ . On notera  $\dot{w}$  la projection de  $w$  sur le second facteur.

On a  $[a, b]^2 = (ab - ba)^2 = vx^2 + uy^2 + z^2 - xyz - 4uv$ . Notons également les formules suivantes où  $w_1$  et  $w_2$  sont des éléments de  $\mathcal{A}'$  :

$$\begin{aligned} [w_1, w_2]^* &= [w_2^*, w_1^*] = -[w_1, w_2], \\ w_1[w_1, w_2] &= [w_1, w_1 w_2] = [w_1, w_2]w_1^*, \quad [w_1, w_2]w_1 = [w_1, w_2 w_1] = w_1^*[w_1, w_2], \\ w_2[w_1, w_2] &= [w_2 w_1, w_2] = [w_1, w_2]w_2^*, \quad [w_1, w_2]w_2 = [w_1 w_2, w_2] = w_2^*[w_1, w_2], \\ [w_1, [w_1, w_2]] &= (w_1 - w_1^*)[w_1, w_2] = -[w_1, w_2](w_1 - w_1^*), \\ [w_2, [w_1, w_2]] &= (w_2 - w_2^*)[w_1, w_2] = -[w_1, w_2](w_2 - w_2^*), \end{aligned}$$

Il résulte de ces formules qu'il existe une application  $A'$ -linéaire  $\xi$  de  $\mathcal{A}' \wedge \mathcal{A}'$  dans  $\mathcal{A}'_1$ , le sous  $A'$ -module de  $\mathcal{A}'$  engendré par  $1, a$  et  $b$ , telle que, pour tout couple  $(w_1, w_2)$  d'éléments de  $\mathcal{A}'$ , on ait

$$[w_1, w_2] = \xi(w_1 \wedge w_2)[a, b]. \quad (1)$$

Les images de  $1 \wedge w, a \wedge b, a \wedge [a, b]$  et  $b \wedge [a, b]$  par  $\xi$  sont respectivement  $0, 1, a - a^*$  et  $b - b^*$ . On a donc

$$\delta[w_1, w_2] = \delta(\xi(w_1 \wedge w_2)) \delta[a, b]. \quad (2)$$

Il résulte aussi de ces formules que  $\tau(a[a, b]) = \tau(b[a, b]) = 0$ . On en déduit, puisqu'en outre  $\tau([a, b]^2) = -2\delta([a, b])$ , que, pour tout  $w \in \mathcal{A}'$ , le polynôme  $\tau(w[a, b])$  est divisible par  $\delta([a, b])$ .

L'identité (1) est celle à laquelle il est fait allusion dans l'introduction. Nous allons donner une autre forme de son corollaire (2).

**THÉOREME 1.** – Si  $w_1$  et  $w_2$  sont dans  $\mathcal{A}'$ , on a  $\delta[w_1, w_2] = \det_{\{1, a, b, ab\}}(1, w_1, w_2, w_1 w_2) \delta[a, b]$ .

*Démonstration.* – Prenons  $\{1, \dot{a}, \dot{b}, [a, b]\}$  pour base de  $\mathcal{A}'$  et posons  $\dot{u} = \delta(\dot{a}), \dot{v} = \delta(\dot{b})$  et  $\dot{z} = \tau(\dot{a}\dot{b})$ . Dans ces conditions, un élément  $w$  de  $\mathcal{A}'$  s'écrit  $w = p + q\dot{a} + r\dot{b} + s[a, b]$ , où  $p, q, r$  et  $s$  sont dans  $A'$  et l'on a  $\tau(w) = 2p$  et  $w^* = p - q\dot{a} - r\dot{b} - s[a, b]$ .

Si  $w_1$  et  $w_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{A}'$ , on a

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= p_1 p_2 + p_2 \dot{w}_1 + p_1 \dot{w}_2 + \frac{1}{2}(\dot{w}_1 \dot{w}_2 + \dot{w}_2 \dot{w}_1) + \frac{1}{2}[w_1, w_2] \\ &= p_1 p_2 - \varphi(\dot{w}_1, \dot{w}_2) + p_2 \dot{w}_1 + p_1 \dot{w}_2 + \frac{1}{2}[w_1, w_2], \end{aligned}$$

où  $\varphi$  est la forme  $A'$ -bilinéaire et symétrique ainsi définie sur  $\ker \tau$ ,

$$\varphi(\dot{w}_1, \dot{w}_2) = \dot{u} q_1 q_2 + \dot{v} r_1 r_2 - \frac{1}{2} \dot{z} (q_1 r_2 + q_2 r_1) + (4\dot{u}\dot{v} - \dot{z}^2) s_1 s_2.$$

On a donc

$$\delta(w) = \frac{1}{2} \tau((p + \dot{w})(p - \dot{w})) = p^2 + \varphi(\dot{w}, \dot{w}).$$

Prenons  $\{1, \dot{a}, \dot{b}\}, \{[a, b], -\dot{b}, \dot{a}\}$  et  $\{\dot{a} \wedge \dot{b}, \dot{a} \wedge [a, b], \dot{b} \wedge [a, b]\}$  comme bases de  $\mathcal{A}'_1, \ker \tau$  et  $\ker \tau \wedge \ker \tau$  respectivement. La matrice de  $\delta \circ \xi$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{u} & -\frac{1}{2}\dot{z} \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{z} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\dot{u} & -2\dot{z} \\ 0 & -2\dot{z} & 4\dot{v} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det_{\{1, a, b, ab\}}(1, w_1, w_2, w_1 w_2) = \det_{\{1, a, b, ab\}} \left( 1, w_1, w_2, \frac{1}{2}[w_1, w_2] \right).$$

En particulier,  $\det_{\{1, a, b, ab\}}(1, \dot{a}, \dot{b}, [a, b]) = 2$ , ce qui donne

$$\det_{\{1, a, b, ab\}}(1, w_1, w_2, w_1 w_2) = \det_{\{\dot{a}, \dot{b}, [a, b]\}}(\dot{w}_1, \dot{w}_2, [w_1, w_2]).$$

Or  $\det_{\{\dot{a}, \dot{b}, [a, b]\}}(\dot{w}_1, \dot{w}_2, [w_1, w_2]) = \gamma(\dot{w}_1 \wedge \dot{w}_2, [w_1, w_2])$ , où  $\gamma$  est la forme bilinéaire dont la matrice par rapport aux bases choisies est la matrice unité. Ainsi,

$$\det_{\{1, a, b, ab\}}(1, w_1, w_2, w_1 w_2) = \gamma(\dot{w}_1 \wedge \dot{w}_2, R_{[a, b]}\xi(\dot{w}_1 \wedge \dot{w}_2)),$$

où  $R_{[a, b]}$  désigne l'opérateur de multiplication à droite par  $[a, b]$ .

Mais, on vérifie facilement que la matrice de  $R_{[a, b]}$  par rapport aux bases choisies est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\dot{u} & -\dot{z} \\ 0 & -\dot{z} & 2\dot{v} \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit que la forme  $\det_{\{\dot{a}, \dot{b}, [a, b]\}}(\dot{w}_1, \dot{w}_2, [w_1, w_2])$ , quadratique par rapport à  $\dot{w}_1 \wedge \dot{w}_2$ , a même matrice que  $\delta \circ \xi$ . Autrement dit, nous avons démontré la relation annoncée.

### 3. Morphismes

Soit  $\sigma$  un  $\mathbb{Z}$ -endomorphisme unifié de l'algèbre  $\mathcal{A}$  tel que  $1, \sigma(a), \sigma(b)$  et  $\sigma(ab)$  soient  $A$ -indépendants. Comme  $x, y, z, u$  et  $v$  sont dans le centre de  $\mathcal{A}$ , il en est de même de leurs images par  $\sigma$ . Des relations  $a^2 - xa + u = 0$  et  $\sigma(a)^2 - \tau(\sigma(a))\sigma(a) + \delta(\sigma(a)) = 0$ , on déduit  $(\sigma(x) - \tau(\sigma(a)))\sigma(a) = \sigma(u) - \delta(\sigma(a))$ , d'où  $\sigma(x) = \tau(\sigma(a))$  et  $\sigma(u) = \delta(\sigma(a))$ . On calcule de même  $\sigma(y), \sigma(z)$  et  $\sigma(v)$ .

Si l'on pose  $\Phi_\sigma(x, y, z, u, v) = (\tau(\sigma(a)), \tau(\sigma(b)), \tau(\sigma(ab)), \delta(\sigma(a)), \delta(\sigma(b)))$ , on a, pour  $w = p + qa + rb + sab$ ,  $\sigma(w) = p \circ \Phi_\sigma + q \circ \Phi_\sigma \sigma(a) + r \circ \Phi_\sigma \sigma(b) + s \circ \Phi_\sigma \sigma(ab)$ .

Nous écrirons indifféremment  $\sigma(p)$  ou  $p \circ \Phi_\sigma$ .

Pour un  $\mathbb{Z}$ -endomorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{A}$ , on définit un élément  $\chi_\sigma$  du  $A$ -module engendré par  $1, a$  et  $b$  par l'égalité  $[\sigma(a), \sigma(b)] = \chi_\sigma[a, b]$ . On a alors  $\sigma_1 \circ \sigma_2([a, b]) = \sigma_1(\chi_{\sigma_2}[a, b]) = \sigma_1(\chi_{\sigma_2})\chi_{\sigma_1}[a, b]$ , d'où  $\chi_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \sigma_1(\chi_{\sigma_2})\chi_{\sigma_1}$ .

Dans le cas où  $\sigma$  provient d'un endomorphisme de  $\Gamma_{\langle a, b \rangle}$  (alors  $u = v = 1$ ),  $\Phi_\sigma$  et  $\delta(\chi_\sigma)$  ne sont autres que l'application  $\Phi_\sigma$  et le polynôme  $Q_\sigma$  définis dans l'introduction.

*Remarque 1.* – On sait ([3] et [5]) qu'un endomorphisme  $\sigma$  de  $\Gamma_{\langle a, b \rangle}$  est un automorphisme si et seulement si  $Q_\sigma = 1$ . Y a-t-il un résultat similaire pour  $\delta(\chi_\sigma)$  ?

Ei et Ito [1] ont montré par des arguments combinatoires qu'un endomorphisme  $\sigma$  de  $\Gamma_{\langle a, b \rangle}$  est un automorphisme si et seulement si  $\sigma(aba^{-1}b^{-1})$  est conjugué à  $aba^{-1}b^{-1}$  ou à  $bab^{-1}a^{-1}$ . Voici une autre preuve : si  $\sigma(aba^{-1}b^{-1})$  est conjugué à  $aba^{-1}b^{-1}$  ou à  $bab^{-1}a^{-1}$ , on a  $Q_\sigma = 1$ , comme le montre la formule  $\tau(uvu^{-1}v^{-1}) = 2 - \delta([u, v])$ , valide pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\Gamma_{\langle a, b \rangle}$ .

### Références bibliographiques

- [1] Ei H., Ito S., Decomposition theorem on invertible substitutions, Osaka J. Math. 35 (1998) 821–834.
- [2] Horowitz R.D., Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group, Commun. Pure and Appl. Math. 25 (1972) 635–649.
- [3] Horowitz R.D., Induced automorphisms on Fricke characters of free groups, Trans. Amer. Math. Soc. 208 (1975) 41–50.
- [4] Magnus W., Rings of Fricke characters and automorphisms group of free groups, Math. Z. 170 (1980) 91–103.
- [5] Peyrière J., Wen Z.-X., Wen Z.-Y., Polynômes associés aux endomorphismes de groupes libres, L'Ens. Math. 2<sup>ème</sup> série 39 (1993) 153–175.
- [6] Procesi C., The invariant theory of  $n \times n$  matrices, Adv. in Math. 19 (1976) 306–381.
- [7] Razmyslov Ju.P., Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero, Izv. Acad. Nauk SSSR ser. Mat. 38 (4) (1974) (in Russian). English translation: Math. USSR Izv. 8 (1974) 727–760.