

Le fabuleux destin des cascades de Mandelbrot

Julien Barral* Jacques Peyrière†

Il est difficile d’embrasser toute l’œuvre de Benoît Mandelbrot, tant elle est multiforme et requiert pour l’apprécier une connaissance de plusieurs disciplines. C’est pourquoi dans cet article nous ne nous occuperons que des sujets avec lesquels nous sommes les plus familiers, c’est-à-dire les processus multiplicatifs et l’analyse multifractale. Cependant, isoler ces matières du reste des travaux de Mandelbrot est quelque peu arbitraire, tant il est vrai que pour lui toutes ses recherches avaient une cohérence interne et participaient d’un même projet. Mandelbrot a été une source d’inspiration non seulement pour nous mais aussi pour nombre de mathématiciens durant une quarantaine d’années. Nous allons donc donner notre sentiment sur les apports de Mandelbrot et le flot de travaux qu’ils ont initiés dans ce domaine.

1 Processus multiplicatifs et intermittence

1.1 La genèse

La motivation principale de l’introduction des processus multiplicatifs vient d’une étude critique de l’article de 1961 de Kolmogorov sur la turbulence [60]. En effet, l’hypothèse de “log-normalité” qui y était introduite soulevait un certain nombre d’interrogations et dans le début des années 60 des tentatives d’aménagements, d’ailleurs peu convaincantes, de cette hypothèse ont été proposées.

Mandelbrot a publié son étude [71] sous le titre “Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in

*Université Paris 13, Institut Galilée, Laboratoire d’Analyse, Géométrie et Applications, CNRS UMR 7539, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, FRANCE, (barral@math.univ-paris13.fr)

†Université Paris-Sud, Mathématiques bât. 425, CNRS UMR 8628, 91405 Orsay Cedex, FRANCE, (Jacques.Peyriere@math.u-psud.fr).

intermittent turbulence”. Malgré la prudence de son titre, ce travail a rencontré beaucoup de réticences, de sorte qu’il a fallu un délai de presque trois ans pour qu’il finisse par être publié en 1972. Il y a deux raisons à cela : d’une part, un dogme était mis en question, d’autre part ce travail était si novateur qu’il n’a pas immédiatement été compris. Pourtant il contenait en germe toute une théorie. Mandelbrot proposait, pour modéliser la dissipation ε d’énergie ce qu’il appelait les “limit lognormal random processes” dont il esquissait la construction :

Under these conditions, one can relate ε to a sequence of random functions (r.f.’s) $F'(x, \lambda, L)$ such that the $\log F'(x, \lambda, L)$ are Gaussian, with the variance $\mu \log(L/\lambda)$, the expectation $-(\mu/2) \log(L/\lambda)$ and a spectral density equal to $\mu/2k$ for $1/L < k < 1/\lambda$, and to 0 elsewhere. Consequently, the covariance $C(s, \lambda)$ of $\log F'(x, \lambda, L)$ will be assumed to satisfy $C(s) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(s, \lambda) = -\mu \log(2\pi e^\gamma s/L)$. (Here, γ is the Euler constant, whose value is about 0.577.)

Il s’agissait d’une intuition fulgurante : ε devait être l’exponentielle d’un processus gaussien de covariance $\log t$ (qui comme on le sait ne peut exister). La construction mathématique rigoureuse restait entièrement à faire. Ce n’est qu’une dizaine d’années plus tard que Kahane [55] a édifié la théorie du chaos multiplicatif : ces objets existent bien, non comme fonctions scalaires aléatoires, mais comme opérateurs aléatoires sur les mesures.

Mandelbrot était conscient des difficultés de compréhension de son modèle, c’est pourquoi, dans deux notes aux Comptes Rendus [73], il en a donné une version dont la définition mathématique ne posait pas de problème et qui rejoignait l’intuition de la communauté de la turbulence. Voici ce dont il s’agit. On part du cube $Q = [0, 1]^d$ et d’un entier $c \geq 2$. Ce cube est divisé en $b = c^d$ sous-cubes égaux Q_1, Q_2, \dots, Q_b . Chacun d’eux est à son tour divisé en b sous-cubes égaux ; par exemple le cube Q_j donne naissance aux cubes $Q_{j,1}, Q_{j,2}, \dots, Q_{j,b}$, et ainsi de suite. On se donne une suite $\{W_{j_1, j_2, \dots, j_n}\}_{n \geq 1, 1 \leq j_k \leq b}$ de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées avec une variable W positive et d’espérance 1. On considère alors la mesure aléatoire μ_n dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est la fonction en escalier valant $W_{j_1} W_{j_1, j_2} \cdots W_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ sur le cube Q_{j_1, j_2, \dots, j_n} .

La suite de ces mesures est une martingale positive, qui donc converge *-faiblement presque sûrement vers une mesure μ .

L’interprétation heuristique de cette construction est la suivante. Les cubes emboîtés, du moins si $d = 3$, modélisent la hiérarchie de tourbillons présents dans un fluide turbulent et la quantité $\mu_n(Q_{j_1, \dots, j_n})$ est une approximation de la dissipation d’énergie dans ce cube. La multiplication aléatoire du passage d’un stade au suivant rend compte des transferts d’énergie

entre tourbillons voisins. C'est ce modèle que Mandelbrot appelle *cascade canonique*. Auparavant d'autres cascades avaient déjà été considérées, notamment par Novikov et Stewart [79] et Yaglom [94], mais à la différence du modèle canonique, les transferts d'énergie se faisaient toujours vers les petites échelles.

Soit Y_n la masse totale de la mesure μ_n :

$$Y_n = b^{-n} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} W_{j_1} W_{j_1, j_2} \cdots W_{j_1, j_2, \dots, j_n}, \quad (1)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$Y_n = b^{-1} \sum_{j=1}^b W_j Y_{n-1}(j). \quad (2)$$

Par passage à la limite on obtient l'égalité presque sûre

$$Y = b^{-1} \sum_{j=1}^b W(j) Y(j) \quad (3)$$

où toutes les variables du second membre sont indépendantes, les $W(j)$ étant équidistribuées avec W et les $Y(j)$ avec Y , qui est la masse totale de μ .

Cette construction, dans le cas où la limite Y est non nulle, résout l'équation (3) où l'inconnue est la loi de Y . Il s'agit d'une généralisation des lois semi-stables.

Pour les cascades canoniques se pose le problème de non-dégénérescence. En effet, il se pourrait que la suite μ_n converge vers 0. Si W a un moment d'ordre 2, l'équation (2) donne

$$\mathbb{E} Y_n^2 = b^{-1} \mathbb{E} W^2 \mathbb{E} Y_{n-1}^2 + b - 1.$$

Il en résulte que, si $\mathbb{E} W^2 < b$, la martingale Y_n est bornée dans L^2 et donc l'espérance de sa limite Y est 1. Mandelbrot avait conjecturé que la condition $\mathbb{E} W^p < b^{p-1}$ entraînait la convergence dans L^p de cette martingale et que la condition $\mathbb{E} W \log W < \log b$ équivalait à son uniforme intégrabilité. Autant le cas L^2 est aisé, autant le cas général est difficile. Il a été résolu par Kahane [53, 59] en exploitant de façon très fine les équations (2) et (3).

Ces notes de Mandelbrot contenaient bien d'autres remarques et conjectures. L'une d'elle était que presque sûrement la mesure μ était portée par un borélien de dimension de Hausdorff $D = d(1 - \mathbb{E} W \log_b W)$ et que tout borélien de dimension strictement inférieure à D est p.s. de μ -mesure nulle.

Ceci a été démontré par Peyrière [83, 59] sous l'hypothèse supplémentaire $\mathbb{E} Y \log^+ Y < \infty$, plus tard levée par Kahane.

On voit donc que ces deux notes ont eu immédiatement un écho parmi les mathématiciens. En revanche la communauté de la turbulence a mis plus de temps à les apprécier.

L'étude de ces mesures aléatoires et de leurs généralisations, ainsi que celle de l'équation fonctionnelle (3), qui est, comme déjà mentionné, une généralisation de celle des lois semi-stables, a engendré une littérature mathématique considérable.

Ces mesures ont aussi été à l'origine de l'analyse multifractale.

Depuis le début, Mandelbrot envisageait de considérer des poids de signe quelconque ou même complexes. Ce n'est que récemment que cette étude a débouché (voir la section 3).

1.2 Les T-martingales

Kahane a introduit [55, 56] la formalisation suivante. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et T un espace localement compact dont $\mathcal{B}(T)$ désigne la tribu de Borel. L'espace $T \times \Omega$ est muni de la tribu produit $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}$. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante sous-tribus de \mathcal{B} et $(Q_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives sur $(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B})$ telle que pour tout $t \in T$, $(Q_n(t, \cdot), \mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ soit une martingale positive d'espérance 1. Une telle suite est appelée T -martingale. Etant donnée λ une mesure de Borel bornée sur T , pour tout $n \geq 1$ soit μ_n la mesure aléatoire, également notée $Q_n \cdot \lambda$, dont la densité par rapport à λ est Q_n . La suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement, pour la topologie faible-*, vers une mesure μ , notée $Q \cdot \lambda$ ou plus simplement $Q\lambda$. C'est une conséquence quasi-immédiate du théorème de convergence des martingales positives et du théorème de représentation de Riesz. Ainsi, une T -martingale définit un opérateur aléatoire opérant sur les mesures.

La mesure aléatoire ainsi obtenue par perturbation de λ va en général, si elle n'est pas presque sûrement nulle, être singulière par rapport à la mesure λ . Nous verrons que dans bien des cas intéressants les processus $(Q_n(t))_{t \in T}$ sont stationnaires. On s'attend alors avec Mandelbrot à ce qu'en présence d'autosimilarité les propriétés géométriques fines de μ héritent à la fois de celles de λ et des propriétés de grandes déviations de Q_n . La suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 1}$ définie dans la section 1.1 rentre dans ce cadre : λ est la mesure de Lebesgue, et Q_n la densité de μ_n par rapport à λ .

1.3 Des cascades aux multifractales

Le modèle introduit par Mandelbrot dans les deux notes [73] déjà citées permet de quantifier le fait que la turbulence soit concentrée sur un ensemble de petite dimension. D'ailleurs, dans le cas où la variable W (qui est d'espérance 1) prend la valeur a avec probabilité $1/a$, les multiplications itérées conduisent à la construction d'un ensemble de Cantor aléatoire. C'est l'essence du β -modèle [42] qui a popularisé les martingales de Mandelbrot auprès de la communauté de la turbulence.

Mais, évidemment, décrire un fluide turbulent au moyen de la seule dimension du support de la dissipation est apparu réducteur. Aussi Frisch et Parisi [41] ont introduit la notion de multifractale. Ils considèrent le champ de vitesse plutôt que la dissipation. Le support de la turbulence est en quelque sorte la superposition d'ensembles de dimensions différentes sur chacun desquels l'exposant de Hölder local de la vitesse a une valeur fixe. La généralisation à d'autres systèmes dynamiques apparaît ensuite dans [44] où est envisagé le cas d'une mesure sur un attracteur étrange. Dans les deux cas, le lien avec le formalisme thermodynamique ou la phase stationnaire est explicite : la dimension de Hausdorff des ensembles de niveau de l'exposant de Hölder local est donnée par la transformée de Legendre d'une fonction de partition τ , qui par la suite a pris plusieurs noms : fonction de structure, L^q -spectre...

Auparavant, Hentschel et Procaccia [45] avaient déjà considéré les "dimensions de Renyi", c'est à dire les quantités $\tau(q)/(q-1)$, où τ est la fonction de structure, mais il n'était fait mention d'aucun lien avec la dimension des ensembles de niveau.

Le mot multifractal et le concept associé apparaissent donc clairement pour la première fois dans l'article [41]. Cependant des comportements multifractals avaient été décrits depuis longtemps par Mandelbrot, notamment dans son article [68] sur les erreurs de transmission dans les lignes téléphoniques. Il y a aussi un paragraphe dans ses notes [73] de 1974 où des statistiques de grandes déviations sont évoquées. Le lien avec les travaux [41, 44] se fait via le théorème de Cramér.

Ce fut le point de départ de nombreux travaux. A notre connaissance le premier qui soit mathématiquement clair est celui de Collet et al. [34], suivi de [31].

Un point de vue plus proche de la théorie géométrique de la mesure a été initié par Olsen [80], mais nous ne développerons pas ce sujet. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter [24, 85].

Nous ne développerons pas non plus les applications des multifractals à d'autres domaines. Ils en ont notamment d'importantes en finance.

Signalons aussi d'autres travaux qui ne sont pas sans liens avec ce qui précède bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'analyse multifractale. Il s'agit de l'utilisation du formalisme thermodynamique pour calculer certaines dimensions de Hausdorff, notamment celle des répulseurs conformes [88, 22, 29] et des ensembles limites de groupes kleinien [30, 92].

2 Des cascades multiplicatives positives

2.1 Cascades b -adiques

2.1.1 Construction, non-dégénérescence et moments

Nous reprenons la construction de Mandelbrot dans un cadre un peu plus général.

Définitions

Soit $b \geq 2$ un entier. Soit \mathcal{A} l'alphabet $\{0, \dots, b-1\}$ et $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}^n$ (par convention, \mathcal{A}^0 est réduit au mot vide). Pour $n \geq 0$, la longueur d'un élément w de \mathcal{A}^n est par définition égale à n et notée $|w|$.

\mathcal{A}^* est un monoïde dont le produit est la concaténation, notée par un point, ou simplement par juxtaposition si cela n'engendre pas d'ambiguïté.

On désigne par T le produit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Ses éléments seront notés si besoin est comme des mots infinis. Si $t \in T$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $t|_n$ le préfixe de longueur n de t , c'est-à-dire le mot de \mathcal{A}^n constitué des n premières lettres de t .

De même, si $w \in \mathcal{A}^m$ et $n \leq m$, $w|_n$ désignera le préfixe de longueur n de w .

A chaque $w \in \mathcal{A}^*$ on associe le cylindre $[w] \subset T$ constitué des mots infinis dont w est préfixe.

On munit l'espace T de l'ultramétrie dont les boules sont les cylindres, le diamètre de $[w]$ valant $b^{-|w|}$.

Nous introduisons, dans le langage des T -martingales présenté plus haut, les mesures introduites dans [73, 74]. Soit $W = (W_0, \dots, W_{b-1})$ un vecteur aléatoire dont les composantes sont positives et d'espérance 1. Soit $\{W(w)\}_{w \in \mathcal{A}^*}$ une famille de copies de W , indépendantes. Les composantes de $W(w)$ seront notées $(W_{w \cdot 0}, \dots, W_{w \cdot (b-1)})$.

Pour $t \in T$ et $n \geq 1$ posons

$$P_n(t) = W_{t|_n} \quad \text{et} \quad Q_n(t) = \prod_{k=1}^n P_k(t).$$

La suite Q_n est une T -martingale.

Soit $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{b-1})$ un vecteur de probabilité sur \mathcal{A} . Considérons λ le produit de Bernoulli défini sur T associé à $\lambda : \lambda([w]) = \lambda_{w_1} \cdots \lambda_{w_n}$ pour tout $n \geq 1$ et $w \in \mathcal{A}^n$. Comme Mandelbrot on considère la mesure aléatoire $\mu = Q\lambda$ définie en section 1.2, dans l'étude de laquelle la fonction concave et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\varphi(q) = -\log_b \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{b-1} (\lambda_j W_j)^q \right) \quad (q \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

joue un rôle primordial (notons que ce modèle contient comme éléments déterministes les mesures binomiales obtenues quand les composantes de W valent 1 presque sûrement). Un autre rôle crucial est joué par l'équation suivante, qui exprime l'auto-similarité de la construction. Si Y désigne la masse totale de μ et $Y(j)$ la masse totale de la copie de μ obtenue en posant $\widetilde{W}(w) = W(j \cdot w)$ pour tout w dans \mathcal{A}^* , on a presque sûrement

$$Y = \sum_{j=0}^{b-1} \lambda_j W_j Y(j), \quad (5)$$

les variables $Y(j)$, $0 \leq j \leq b-1$ étant indépendantes et indépendante de W .

Les cascades multiplicatives, dites canoniques, correspondent au cas le plus simple où λ est la mesure de Lebesgue et les composantes de W sont indépendantes et équidistribuées. Le théorème suivant, qui porte sur la non dégénérescence de μ fut conjecturé par Mandelbrot, prouvé par Kahane [59] dans le cas des cascades canoniques en exploitant analytiquement (5), puis étendu au cadre général présenté ici par Durrett et Liggett [36], qui utilisent une approche plus probabiliste basée sur la théorie des marches aléatoires sur \mathbb{R} , et notamment le théorème de renouvellement.

Lorsque $b = c^d$, avec $d \geq 1$, via les développements en base c on peut définir une application de l'espace T sur $[0, 1]^d$ qui transforme les cylindres en cubes c -adiques. Les martingales de Mandelbrot définissent alors des mesures aléatoires sur $[0, 1]^d$. La convergence de ces martingales, après projection sur $[0, 1]$ est illustrée figure 1.

Nous excluons désormais le cas particulier où $\mathbb{P}(\lambda_j W_j \in \{0, 1\}) = 1$ pour tout j dont l'étude se ramène à celle d'un processus de Galton-Watson critique; alors si la mesure μ n'est pas nulle, c'est une masse de Dirac.

Théorème 2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{P}(\mu \neq 0) > 0$;

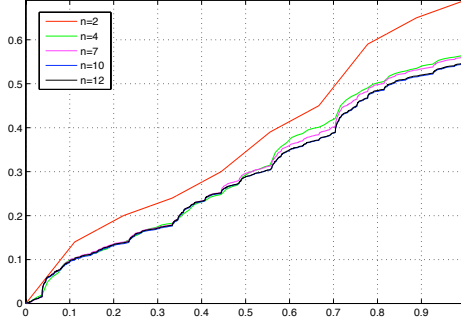


FIGURE 1 – Intégrale indéfinie $\int_0^t d\mu_n(u)$ d’une cascade de Mandelbrot triadique, pour $n \in \{2, 4, 8, 12\}$.

2. La martingale $(\|\mu_n\|, \mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable ;
3. $\varphi'(1_-) > 0$.

De plus, Mandelbrot conjecture que le nombre $\varphi'(1_-)$ contient une information géométrique précise sur μ . En effet, Peyrière [83, 59] (sous l’hypothèse que $E(Y \log^+(Y)) < \infty$ qui sera supprimée par Kahane [57] au moyen d’une technique de percolation) en introduisant la probabilité définie sur $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}$ par $\mathcal{Q}(A \times B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mu(A))$ montre le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Soit $D = \varphi'(1_-)$. Supposons $D > 0$. Alors, presque sûrement, si $\mu \neq 0$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\mu([t]_n))}{\log |[t]_n|} = D \quad \mu\text{-presque partout,}$$

où $|[t]_n|$ désigne le diamètre b^{-n} de $[t]_n$. Autrement dit, μ est portée par un ensemble de dimension de Hausdorff D et tout borélien de dimension de Hausdorff strictement inférieure à D est de μ mesure nulle (on dit alors que la mesure μ est exactement dimensionnelle, de dimension D).

Mandelbrot relève le fait fondamental que ce modèle offre de surcroît la possibilité que la masse totale Y de μ ait une distribution à “queue épaisse”, et se révèle par là davantage pertinent pour modéliser les phénomènes intermittents exhibant des événements extrêmes. Il conjecture le résultat suivant (sous une forme un peu moins précise pour la seconde partie).

Théorème 2.3. *Supposons $\varphi'(1_-) > 0$.*

1. *Soit $q > 1$. On a $\mathbb{E}(Y^q) < \infty$ si et seulement si $\varphi(q) > 0$.*
2. *S'il existe $q > 1$ tel que $\varphi(q) = 0$ et si $\mathbb{E} \sum (\lambda_j W_j)^q \log^+(\lambda_j W_j) < \infty$, alors*

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} x^q \mathbb{P}(Y > x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} x^q \mathbb{P}(Y > x) < \infty,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par les supports des lois des variables $\log(\lambda_j W_j)$ conditionnées par $\lambda_j W_j > 0$ est dense.

La première partie, prouvée pour les moments d'ordres entiers par Mandelbrot, est due à Kahane pour les cascades canoniques et Durrett et Liggett pour le cas général ; la preuve repose sur une manipulation assez directe de (5). La seconde partie est due à Guivarc'h pour le cas canonique [43] et Q. Liu pour le cas général [64]. La preuve exploite une réécriture de (5) comme une équation aux différences aléatoires vue sous la probabilité \mathcal{Q} , puis utilise le théorème du renouvellement.

Cette construction a connu de nombreuses variantes et généralisations. On peut remplacer l'arbre homogène \mathcal{A}^* par un arbre aléatoire de Galton-Watson [84], ou par un arbre coloré [23], ce qui revient à faire agir la T -martingale sur une mesure de Markov [40]. Voir aussi [62].

2.1.2 Grandes déviations et analyse multifractale

Mandelbrot perçoit très tôt, en s'appuyant sur les cascades canoniques, que les propriétés de grandes déviations des produits définissant les densités $Q_n(t)$ doivent se retrouver dans le comportement höldérien de la mesure μ sur les cylindres b -adiques [73]. Il considère pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$ la fréquence logarithmique d'apparition d'un cylindre $[w]$ de génération n pour lequel $\frac{\log(\mu([w]))}{|[w]|}$ vaut α à ϵ près :

$$f(\alpha, n, \epsilon) = \frac{\log(\text{card}\{w \in \mathcal{A}^n : b^{-n(\alpha+\epsilon)} \leq \mu([w]) \leq b^{-n(\alpha-\epsilon)}\})}{\log(\text{card } \mathcal{A}^n)}.$$

Supposons que nous soyons dans le cas canonique, c'est-à-dire que les composantes de W sont i.i.d., et désormais pour simplifier, que ces poids sont strictement positifs. Supposons aussi $\varphi(q) > -\infty$ pour tout $q \in \mathbb{R}$ et bien sûr $\varphi'(1) > 0$.

Il est temps de préciser que la μ -masse de tout cylindre $[w]$ s'écrit

$$\mu([w]) = Y(w)b^{-n} \prod_{k=1}^{|w|} W_{w|_k}, \quad (6)$$

où $Y(w)$ est la copie de Y obtenue à partir de la famille $\{\widetilde{W}(v)\}_{v \in \mathcal{A}^*} = \{W(w \cdot v)\}_{v \in \mathcal{A}^*}$. Le comportement asymptotique des fréquences $f(\alpha, n, \epsilon)$ doit donc être relié aux propriétés de grandes déviations de la marche aléatoire $W_{t|_1} \cdots W_{t|_n}$ dont la loi ne dépend pas de $t \in T$, et pour laquelle le théorème de Cramér (cf. [38]) permet de dire que, pour tout $\alpha \in \varphi'(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \mathbb{P} \left(b^{-n(\alpha+\epsilon)} \leq b^{-n} W_{t|_1} \cdots W_{t|_n} \leq b^{-n(\alpha-\epsilon)} \right) = \varphi^*(\alpha) - 1,$$

où $\varphi^*(\alpha) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \alpha q - \varphi(q)$ est la transformée de Legendre de φ , qui est à valeurs dans $[-\infty, 1]$ et atteint son maximum 1 en $\alpha = \varphi'(0)$.

De l'égalité précédente et du fait que $\text{card } \mathcal{A}^n = b^n$, on déduit que lorsque $\varphi^*(\alpha) < 0$, pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\exists w \in \mathcal{A}^n : (b^{-n(\alpha+\epsilon)} \leq b^{-n} W_{w|_1} \cdots W_{w|_n} \leq b^{-n(\alpha-\epsilon)}) \right) < \infty.$$

Il découle alors du lemme de Borel-Cantelli (et en admettant ici que la contribution de $Y(w)$ à $\mu([w])$ ne joue pas de rôle, ce qui provient du contrôle de la finitude des moments d'ordres positifs et négatifs de Y) que $f(\alpha, n, \epsilon) = -\infty$ pour n assez grand, ce qui signifie qu'à partir d'une certaine génération n on n'observe pas l'exposant α . En revanche, si $0 \leq \varphi^*(\alpha) \leq 1$ on s'attend à observer asymptotiquement de l'ordre de $b^{n\varphi^*(\alpha)}$ intervalles où la dimension locale de μ vaut approximativement α .

Mandelbrot, à l'époque, n'était pas allé jusqu'à considérer le point de vue géométrique consistant à étudier les ensembles de niveau

$$E_\mu(\alpha) = \left\{ t : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\mu([t|_n]))}{\log |[t|_n]|} = \alpha \right\} \quad (\alpha \geq 0)$$

autres que l'ensemble $E_\mu(D)$; ils furent essentiellement introduits dans [41] et [44], et décrivent de façon géométrique l'hétérogénéité de la distribution de μ . Nous verrons que la mesure μ obéit au formalisme multifractal tel que défini dans [44] en ce sens que la dimension de Hausdorff de $E_\mu(\alpha)$ s'obtient comme transformée de Legendre de la fonction d'énergie libre

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log_b \sum_{w \in \mathcal{A}^n} \mu([w])^q. \quad (7)$$

Poursuivant le point de vue des grandes déviations, Mandelbrot a par la suite introduit la notion d'exposant latent et de dimension négative [75]. En effet, si l'on n'observe pas α asymptotiquement parce que $\varphi^*(\alpha) < 0$, ce dernier n'en reste pas moins latent au sens où il a tout de même une probabilité non nulle d'être observé à une génération fixée, et où l'on finira par l'observer à la génération n , pour n grand, si l'on considère de très nombreuses réalisations indépendantes de la mesure μ , essentiellement $b^{-n\varphi^*(\alpha)}$ (ceci est formalisé dans [7]).

Cela conduit Mandelbrot à interpréter $1 - \varphi^*(\alpha)$ comme une codimension en adoptant le point de vue heuristique suivant : si un ensemble fractal E inclus dans $[0, 1]^d$ a pour dimension de boîte D , et est donc recouvert approximativement par b^{nD} cylindres de génération n , alors pour être certain asymptotiquement de collecter un cylindre de génération n qui contienne un point de E , on doit en tirer au hasard au minimum $b^{n(d-D)}$, où $d - D$ est la codimension de E . On voit alors que dans le cas de la mesure μ construite sur $[0, 1]$, puisque pour observer un intervalle dyadique sur lequel l'exposant de μ est approximativement égal à α , il faut de l'ordre de $b^{-n\varphi^*(\alpha)}$ réalisations de μ , soit $b^{n(1-\varphi^*(\alpha))}$ intervalles, la dimension négative de l'ensemble virtuel des points sur lesquels on observe un exposant de Hölder égal à α est le nombre $\varphi^*(\alpha)$.

L'autre façon, plus géométrique, dont Mandelbrot parle d'exposants latents est de construire la cascade sur un pavé $[0, 1]^d$ avec $d \geq 1 - \varphi^*(\alpha)$. Alors, on observera pour n grand un exposant presque égal à α sur un nombre de cubes de l'ordre de $b^{n(d-1+\varphi^*(\alpha))}$, tandis que si l'on regarde au hasard une coupe unidimensionnelle du cube, on n'observera pas α le long de cette coupe.

Les propriétés de grandes déviations précédentes ont la contrepartie géométrique donnée par l'analyse multifractale de μ qui, ainsi que celle de variantes de μ , a fait l'objet de nombreux travaux ([33, 46, 39, 78, 2, 8, 82]). L'énoncé suivant ne suppose plus la cascade canonique. En revanche nous postulons toujours que les composantes de W ne s'annulent pas et que $\varphi > -\infty$ sur \mathbb{R} (ce qui impose aux λ_j d'être strictement positifs).

Théorème 2.4. *Avec probabilité 1, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $E_\mu(\alpha)$ est non vide si et seulement si $\varphi^*(\alpha) \geq 0$, et dans ce cas on a*

$$\dim E_\mu(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha, n, \epsilon) = \varphi^*(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha),$$

où \dim désigne la dimension de Hausdorff.

Il n'est pas question ici d'en donner la preuve complète. Nous en donnons néanmoins quelques idées.

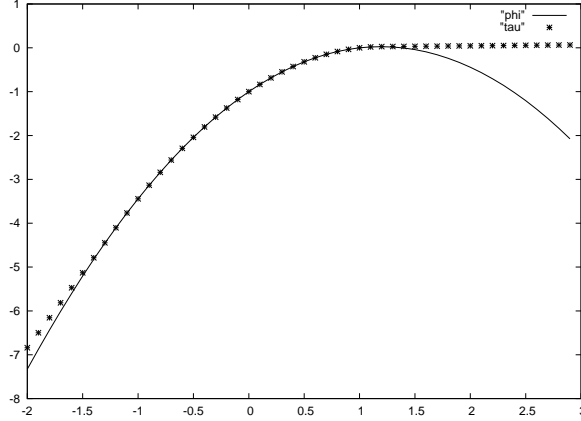


FIGURE 2 – Exemple de couple (φ, τ_μ) dans le cas d’une cascade lognormale. Ici $b = 2$, $(W_0, W_1) = \left(\frac{e^{\xi_0}}{\mathbb{E}(e^{\xi_0})}, \frac{e^{\xi_1}}{\mathbb{E}(e^{\xi_1})} \right)$, où ξ_0 et ξ_1 sont deux variables normales centrées réduites et indépendantes, et $\lambda_0 = \lambda_1 = 1/2$. On a $\varphi(q) = (q - 1) \left(1 - \frac{q}{2 \log(2)} \right)$, $D = \varphi'(1) = 1 - \frac{1}{2 \log(2)}$, $q_+ = \sqrt{2 \log(2)}$, $q_- = -q_+$, $\tau_\mu(q) = (1 + 1/\sqrt{2 \log(2)})^2 q$ si $q < q_-$, $\tau_\mu(q) = \varphi(q)$ si $q \in [q_-, q_+]$, et $\tau_\mu(q) = (1 - 1/\sqrt{2 \log(2)})^2 q$ si $q > q_+$.

Rappelons les définitions (4) et (7) de φ et τ_μ . D’abord, (voir [82] notamment, et la figure 2 pour une illustration), en posant

$$q_+ = \sup\{q > 0 : \varphi^*(\varphi'(q)) \geq 0\} \quad \text{et} \quad q_- = \inf\{q < 0 : \varphi^*(\varphi'(q)) \geq 0\},$$

avec probabilité 1, on a

$$\tau_\mu(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log_b \sum_{w \in \mathcal{A}^n} \mu([w])^q = \begin{cases} q \frac{\varphi(q_-)}{q_-} & \text{si } q < q_-, \\ \varphi(q) & \text{si } q \in [q_-, q_+], \\ q \frac{\varphi(q_+)}{q_+} & \text{si } q > q_+. \end{cases} \quad (8)$$

(il n’est pas difficile de voir que l’hypothèse $\varphi'(1) > 0$ impose $q_+ > 1$).

La fonction τ_μ devient linéaire si et seulement s’il existe des exposants latents, c’est à dire si $\varphi^*(\varphi')$ s’annule. Si l’on écrit $\sum_{w \in \mathcal{A}^n} \mu([w])^q$ sous la forme

$\sum_{w \in \mathcal{A}^n} b^{-nq \log(\mu([w])/\log(|[w]|))}$, alors l'égalité (8) et le théorème de Gartner-Ellis (cf. [38]) donnent

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha, n, \epsilon) = \varphi^*(\alpha),$$

presque sûrement, simultanément pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\varphi'(q_-), \varphi'(q_+)\}$.

Pour étudier les ensembles $E_\mu(\alpha)$, on considère pour tout $q \in]q_-, q_+[$ les vecteurs $W_q(w) = \left(\frac{W_{w \cdot 0}^q}{\mathbb{E}(W_0^q)}, \dots, \frac{W_{w \cdot b-1}^q}{\mathbb{E}(W_{b-1}^q)} \right)$, $w \in \mathcal{A}^*$, ainsi que la mesure de Bernoulli λ_q associée au vecteur de probabilité

$$\lambda_q = b^{\varphi(q)} \left(\lambda_0^q \mathbb{E}(W_0^q), \dots, \lambda_{b-1}^q \mathbb{E}(W_{b-1}^q) \right).$$

Chacune des familles précédentes détermine une martingale $Q_{q,n} \cdot \lambda_q$ qui converge presque sûrement vers une limite $\mu_q = Q_q \cdot \lambda_q$. De plus, un calcul direct montre que dans ce cas la condition $\varphi'(1) > 0$ s'écrit $\varphi^*(\varphi'(q)) > 0$. La limite est donc non dégénérée. Cependant, pour obtenir le résultat uniforme en α , il faut disposer de ces mesures strictement positives presque sûrement simultanément pour tous $q \in]q_-, q_+[$. Ceci est fait dans [8] en exploitant une idée introduite dans l'étude des grandes déviations pour les marches aléatoires de branchement [27].

On peut alors considérer pour tout $q \in \mathbb{R}$ les fonctions génératrices logarithmiques

$$L_{q,n}(s) = -\frac{1}{n} \log_b \sum_{w \in \mathcal{A}^n} \mu([w])^s \mu_q([w])$$

et

$$\tilde{L}_{q,n}(s) = -\frac{1}{n} \log_b \sum_{w \in \mathcal{A}^n} \mu_q([w])^s \mu_q([w])$$

et montrer que presque sûrement, pour tout $q \in]q_-, q_+[$, pour tout s assez petit, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{q,n}(s) = \varphi(q+s) - \varphi(q) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{L}_{q,n}(s) = \varphi(qs) - s\varphi(q).$$

Posons $L_q(s) = \varphi(q+s) - \varphi(q)$ et $\tilde{L}_q(s) = \varphi(qs) - s\varphi(q)$; on a $L'_q(0) = \varphi'(q)$ et $\tilde{L}'_q(0) = \varphi^*(\varphi'(q))$. On déduit de la convergence des $L_{q,n}$ et des $\tilde{L}_{q,n}$ et du théorème de Gartner-Ellis que presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_q \left(\left\{ t \in T : \frac{\log(\mu([t]_n))}{\log |[t]_n|} \notin [L'_q(0) - \epsilon, L'_q(0) + \epsilon] \right\} \right) < 0$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_q \left(\left\{ t \in T : \frac{\log(\mu_q([t]_n))}{\log |[t]_n|} \notin [\tilde{L}'_q(0) - \epsilon, \tilde{L}'_q(0) + \epsilon] \right\} \right) < 0.$$

Il résulte alors du lemme de Borel-Cantelli que la mesure μ_q est concentrée sur $E_\mu(L'_q(0))$ et sur $E_{\mu_q}(\tilde{L}'_q(0))$. Elle est donc portée par $E_\mu(\varphi'(q))$ et est exactement dimensionnelle, de dimension $\varphi^*(\varphi'(q))$. Cela fournit la borne inférieure attendue pour $\dim E_\mu(\varphi'(q))$ uniformément en $q \in]q_-, q_+[$. La borne supérieure ne pose pas de problème car, en utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, on a facilement $\dim E_\mu(\alpha) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} f(\alpha, n, \epsilon)$. Le cas des points $\varphi'(q_-)$ et $\varphi'(q_+)$ est plus délicat ; il est traité dans [8] et [11].

Pour finir, nous recommandons la lecture de [77] dans lequel Mandelbrot présente une synthèse de ses idées sur les cascades basées sur un exemple simple.

2.1.3 Quelques travaux liés aux cascades b -adiques

L'équation (5), vraie presque sûrement dans le cadre des cascades multiplicative, induit une égalité en loi dont la recherche exhaustive des solutions positives a fait l'objets de travaux profonds [36, 43], qui débouchent sur une extension de la notion de loi semi-stable, et conduisent naturellement à inclure dans une même classe de processus semi-stables généralisés les subordinateurs de Lévy stables et les intégrales indéfinies de mesures de Mandelbrot réalisées sur l'intervalle $[0, 1]$, $F(t) = \int_0^t d\mu(u)$, en considérant l'objet plus général $L_\beta \circ F$, où L_β est un subordinateur de Lévy stable d'indice $\beta \in]0, 1]$ (L_1 est l'identité). L'analyse multifractale de ces processus [21] soulève des difficultés essentielles, et nécessite l'introduction de la notion d'ubiquité hétérogène, qui conduit à une généralisation non triviale du théorème de Jarnik en théorie métrique des nombres [20].

D'autre part, un certain nombre de théorèmes limites dérivent de l'étude des cascades. Ainsi, dans le cas des cascades canoniques, loi des grands nombres, TCL (théorème central limite), loi du logarithme itéré et un principe de grandes déviations fonctionnels sont établis dans [65, 66] pour les mesures aléatoires μ_n lorsque le nombre de branchement de l'arbre b tend vers l'infini. Dans [17], le processus multiplicatif de construction de μ est utilisé itérativement pour construire un système dynamique sur l'ensemble des solutions de (5) auquel est associé un TCL fonctionnel dont l'objet limite est un processus gaussien limite d'une cascade additive sur l'arbre b -adique.

Enfin, citons la fragmentation auto-similaire qui a une parenté certaine avec les cascades sur les arbres [9].

2.2 Recouvrements aléatoires et cascades.

2.2.1 Recouvrements aléatoires et cascades de Poisson composées

Recouvrements aléatoires

En 1956, A. Dvoretzky [37] pose le problème suivant : étant données une suite $(\omega_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans le tore \mathbb{T} uniformes et indépendantes et $(\ell_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres de $]0, 1[$ décroissant vers 0, à quelle condition sur $(\ell_n)_{n \geq 1}$ a-t-on $\bigcup_{n \geq 1} (\omega_n, \omega_n + \ell_n) = \mathbb{T}$ presque sûrement ? Un certain nombre de mathématiciens s'y sont intéressés et y ont donné des réponses partielles, jusqu'à ce que L. Shepp [90] (voir aussi [54]), donne la condition nécessaire et suffisante $\sum_{n \geq 1} n^{-2} \exp(\ell_1 + \dots + \ell_n) = \infty$. On s'était aperçu au fil des tentatives que, comme le confirme cette condition, la solution dépendrait de façon très fine de la vitesse de convergence de ℓ_n vers 0, en montrant qu'il n'y a pas recouvrement presque sûr si $\ell_n = \alpha/n$ et $\alpha < 1$ (Billard, cf. [54]), et que ce recouvrement a lieu presque sûrement si $\ell_n = \alpha/n$ et $\alpha > 1$ (Kahane, cf. [54]). Le cas $\alpha = 1$ a finalement été résolu indépendamment par Mandelbrot [69] et Orey [81]. L'approche de Mandelbrot repose sur l'introduction du recouvrement poissonien de la demi-droite \mathbb{R}_+ pour lequel il pose un problème analogue à celui de Dvoretzky, et auquel il est capable de ramener ce dernier, l'intérêt étant que le nouveau modèle est beaucoup plus abordable [70]. Mais la principale motivation de Mandelbrot est de proposer une construction très naturelle et directe des sous-ensembles régénératifs, et fractals, de \mathbb{R}_+ que sont les ensembles de niveaux de processus de Markov récurrents (c.f. [26]) et qu'on peut voir comme des généralisations aléatoires des ensembles de Cantor. La construction étendue en dimension 2 lui servira notamment pour construire un modèle aléatoire des cratères de la lune [72].

La construction est la suivante. Soit ν une mesure de Radon sur $(0, \infty)$ et λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Soit \mathcal{P} un processus de Poisson d'intensité $\lambda \otimes \nu$ dans $\mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$. On s'intéresse à l'ensemble résiduel R des points de \mathbb{R}_+ non recouverts par la famille au plus dénombrable d'intervalles aléatoires, dits de coupure, $\{(t, t+r) : (t, r) \in \mathcal{P}\} : R = \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{(t,r) \in \mathcal{P}} (t, t+r)$. La question est maintenant de savoir à quelle condition on a $R = \{0\}$ presque sûrement. Dans [70], Mandelbrot s'approche de la condition nécessaire et suffisante trouvée par L. Shepp dans [91] : $\int_0^1 dx \exp \int_x^\infty \nu((y, \infty)) dy = \infty$.

Cascades de Poisson composées

On considère un processus de Poisson comme précédemment, à ceci près que la mesure de Lebesgue est prise sur \mathbb{R} tout entier, pour des raisons de

modélisation. Soit $\Lambda = \lambda \otimes \nu$. A chaque point M de \mathcal{P} , on associe une variable aléatoire W_M , prise dans une collection de variables aléatoires indépendantes, indépendantes de \mathcal{P} , et identiquement distribuées avec une variable strictement positive W intégrable. Soit $b \geq 2$ un entier, et pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$ le cône tronqué

$$\Delta\mathcal{C}_n(t) = \{(t', r) : b^{-n} < r \leq b^{1-n}, t - r/2 \leq t' < t + r/2\}.$$

On obtient une $[0, 1]$ martingale de la façon suivante. Pour $t \in [0, 1]$ et $n \geq 1$, posons

$$P_n(t) = e^{-\Lambda(\Delta\mathcal{C}_n(t))(\mathbb{E}(W)-1)} \prod_{M \in \mathcal{P} \cap \Delta\mathcal{C}_n(t)} W_M,$$

et

$$Q_n(t) = \prod_{k=1}^n P_k(t).$$

Comme modèle aléatoire de turbulence, qui sera étudié dans [14], Mandelbrot propose la mesure $Q \cdot \lambda_{[0,1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \cdot \lambda_{[0,1]}$ (qui s'avère ne pas dépendre de la base b choisie ; en effet on pourrait aussi bien définir ici un chaos multiplicatif à temps continu, voir [14]) lorsque $\nu(dr) = \delta dr/r^2$, avec $\delta > 0$. Ce modèle a l'avantage de posséder des propriétés d'autosimilarité en loi tout comme les cascades b -adiques, mais il s'affranchit de sa dépendance d'une grille prescrite et physiquement non réaliste. Les poids $P_k(t)$ sont maintenant i.i.d., et l'on a essentiellement les mêmes résultats que pour une cascade canonique b -adique en ce qui concerne la non dégénérescence, la finitude des moments et l'analyse multifractale (à condition de remplacer dans la définition des ensembles de niveau les cylindres de T par les intervalles b -adiques correspondants, ou par des intervalles centrés de rayon tendant vers 0) ; la fonction φ à considérer est encore donnée par (4), mais elle doit être calculée avec le poids aléatoire $P_1(t)$, ce qui donne

$$\varphi(q) = q - 1 + \delta(q(\mathbb{E}(W) - 1) - (\mathbb{E}(W^q) - 1)).$$

Les martingales $Q_n \cdot \lambda$, sont appelées cascades de Poisson composées. Au delà de leur intérêt propre, ces objets jouent un rôle primordial dans l'analyse fine des recouvrements aléatoires, en permettant de préciser le caractère plus ou moins hétérogène de la fréquence de recouvrement des points [10, 9]. Par exemple, dans le recouvrement de Dvoretzky, notons $N_n(t)$ le nombre d'arcs qui parmi les n premiers recouvrent t et supposons $\ell_n = \alpha/n$; on a $\mathbb{E}(N_n(t)) = \ell_1 + \dots + \ell_n \sim \alpha \log(n)$ pour chaque $t \in \mathbb{T}$, et le théorème de Fubini donne alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(t)}{\alpha \log(n)} = 1$ presque sûrement, Lebesgue presque partout. En utilisant le lien établi par Mandelbrot entre recouvrement de

Dvoretzky et recouvrement poissonien, et en considérant une famille appropriée de cascades de Poisson composées, on peut enrichir l'information précédente en montrant qu'avec probabilité 1, pour tout $\beta \geq 0$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points t de \mathbb{T} tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(t)}{\alpha \log(n)} = \beta$ est donnée par $1 - \alpha(1 - \beta + \beta \log \beta)$ (ici encore une dimension négative signifie que l'ensemble est vide).

2.2.2 Cascades log-infiniment divisibles.

L'étude des cascades de Poisson composées a servi de socle à la construction de la classe plus large des cascades log-infiniment divisibles dans [6], principalement motivée par la modélisation de la turbulence et celle de certaines données financières.

Nous adoptons les notations de la section précédente.

Soit ψ un exposant caractéristique de Lévy défini sur \mathbb{R} , i.e.

$$\psi : \xi \in \mathbb{R} \mapsto ia\xi - \sigma^2 \xi^2 / 2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \pi(dx), \quad (9)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et π est une mesure de Radon sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $\int (1 \wedge |x|^2) \pi(dx) < \infty$.

Soit ρ une mesure signée aléatoire infiniment divisible sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, de mesure de contrôle Λ et d'exposant de Lévy ψ (voir [86] pour la construction). Ainsi, pour tout borélien $B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(e^{i\xi \rho(B)}) = \exp(\psi(\xi) \Lambda(B))$$

et, pour toute famille finie $\{B_i\}$ de boréliens deux à deux disjoints dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $\Lambda(B_i) < \infty$, les variables aléatoires $\rho(B_i)$ sont indépendantes.

Soit I l'intervalle des $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $\int_{|x| \geq 1} e^{\xi x} \pi(dx) < \infty$. La fonction ψ s'étend naturellement à $-iI$. Si l'on suppose que $1 \in I$, alors sans perte de généralité on peut supposer que $\psi(-i) = 1$ et définir pour $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$ le poids aléatoire d'espérance 1

$$P_n(t) = \exp(\rho(\Delta \mathcal{C}_n(t))),$$

puis la $[0, 1]$ -martingale $Q_n(t) = \prod_{k=1}^n P_n(t)$.

Lorsque $\nu(dr) = dr/r^2$, on a les mêmes résultats que pour les cascades de Poisson composées quant à la non dégénérescence, la finitude des moments et l'analyse multifractale; les preuves utilisent les mêmes ressorts (voir [15] qui traite une classe de $[0, 1]$ -martingales abstraites contenant celles décrites

dans cet article et d'autres exemples de tels objets auto-similaires en loi). La fonction φ prend ici la forme

$$\varphi(q) = q - 1 - \psi(-iq).$$

Un autre apport important de [6] est de modifier la construction du poids $P_1(t)$ pour obtenir une remarquable propriété d'invariance d'échelle pour les masses des sous-intervalles de $[0, 1]$.

Les cascades log-infiniment divisibles gaussiennes ($a = 0$ et $\pi = 0$), ainsi que les cascades canoniques log-normales, ont fait l'objet tout récemment d'une attention particulière dans le domaine de la gravité quantique, avec la démonstration de la formule "KPZ", où $\log(Q_n(t))$ est le champ libre gaussien [25, 87, 35]. Elles interviennent également dans la construction de processus proches des courbes SLE_κ par la méthode de soudure conforme [4].

3 Cascades multiplicatives signées

Des phénomènes intermittents, tels l'évolution de la vitesse d'une particule de fluide turbulent au cours du temps ou celle des cours de la bourse, se mesurent naturellement à l'aide de fonctions. Il faut donc des modèles aléatoires de fonctions multifractales. On peut en construire en subordonnant à une fonction B d'irrégularité constante (nous dirons monofractale), telle un mouvement brownien fractionnaire ou une fonction de Weierstrass, une fonction croissante multifractale F du type intégrale indéfinie de cascade multiplicative afin d'obtenir la fonction $B \circ F$ (il existe des variantes de ce type de constructions consistant, grosso modo, à intégrer une $[0, 1]$ -martingale contre un mouvement brownien fractionnaire). Ce type de modèle fut introduit et promu par Mandelbrot [76]. Il était motivé par l'idée que lorsque c'est possible, il est souhaitable, pour mieux comprendre sa structure, de représenter une fonction multifractale réelle ou complexe f définie sur un intervalle comme la composée d'un objet monofractal B (c'est dire qu'il existe $H \in (0, 1)$ tel que pour tout t , $\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \text{Osc}_B([t-r, t+r])}{\log(r)} = H$), donc de géométrie fractale a priori plus simple, représentant toute la structure des oscillations de f , avec un changement de temps croissant qui porte toute les propriétés de multifractalité. Ce principe de représentation fonctionne pour certaines classes de fonctions dites auto-similaires ou auto-affines, dont il simplifie considérablement l'analyse multifractale ([50, 76, 89]). Il opère également en un sens générique dans certaines classes de fonctions [32]. Une construction alternative consiste à considérer des séries d'ondelettes à coefficients prescrits judicieusement [3, 5, 19]. Cependant, Mandelbrot savait de-

puis ses tout premiers travaux sur les processus multiplicatifs qu'il était possible de construire directement des fonctions aléatoires sur le modèle des cascades multiplicatives en autorisant les poids à prendre des valeurs négatives, comme il l'explique dans ses notes [73]. Il attachait beaucoup d'importance à cette situation générale ; mais ce n'est que récemment que cette idée s'est pleinement développée, à partir de ses conjectures pour le cas monofractal donnant lieu à l'article [16]. Cet article a ouvert la voie à des développements importants dont nous allons donner un aperçu. Nous verrons en particulier que les limites presque sûres de cascades multiplicatives signées peuvent elles-mêmes avoir la propriété de se décomposer comme mouvement monofractal en temps multifractal, et que l'étude de certains cas dégénérés a fait émerger le mouvement brownien en temps multifractal comme processus limite d'un TCL fonctionnel. Nous verrons également que ces travaux révèlent de nouveaux comportements multifractals. Nous n'aborderons ici que les cascades b -adiques.

3.1 Construction et résultats de convergence

On considère maintenant $W = (W_0, \dots, W_{b-1})$ un vecteur aléatoire dont les composantes sont complexes et intégrables, et tel que $\mathbb{E}(\sum_{j=0}^{b-1} W_j) = 1$. Soit $\{W(w) = (W_{w \cdot 0}, \dots, W_{w \cdot b-1})\}_{w \in \mathcal{A}^*}$ une famille de copies de W indépendantes. Soit alors pour tout $n \geq 1$ la fonction $F_{W,n}$ définie sur $[0, 1]$ par

$$F_{W,n}(t) = \int_0^t b^n W_{u_{|1}} W_{u_{|2}} \cdots W_{u_{|n}} du,$$

où $u_{|n}$ désigne le mot formé des n premiers chiffres du développement b -adique de u .

Lorsque les poids sont positifs, $F_{W,n}$ n'est autre que l'intégrale indéfinie de la mesure μ_n associée aux vecteurs $(W_{w \cdot 0}/\mathbb{E}(W_0), \dots, W_{w \cdot b-1}/\mathbb{E}(W_{b-1}))$ et au vecteur de probabilité $\lambda = (\mathbb{E}(W_0), \dots, \mathbb{E}(W_{b-1}))$ dans la section 2.1.1.

Soit à présent

$$\varphi_W(q) = -\log_b \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{b-1} |W_j|^q \right).$$

3.1.1 Convergence forte et décomposition

On dispose de conditions suffisantes pour la convergence de $F_n = F_{W,n}$, qui semblent optimales au regard du cas des poids positifs (théorèmes 2.1 et 2.3). Les résultats suivants, illustrés par les figures 3.1.1 et 3.1.1, sont établis dans [12, 13]. Il s'avère naturel de distinguer le cas *non conservatif*

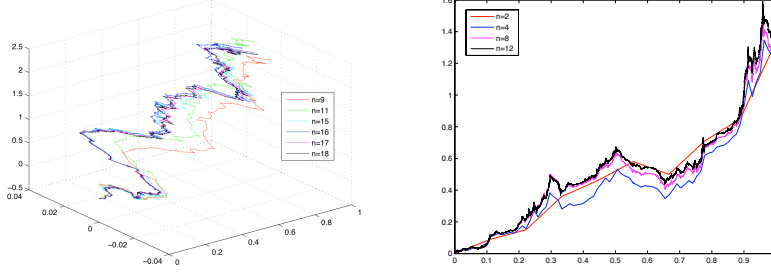


FIGURE 3 – Gauche : Convergence uniforme d’une cascade canonique dyadique à valeurs complexes : F_n pour $n \in \{9, 11, 15, 16, 17, 18\}$. Droite : Convergence uniforme d’une cascade non canonique, non conservative, à valeurs réelles : $F_{W,n}$ pour $n \in \{2, 4, 8, 12\}$ ($b = 3$).

(pour lequel $W_0 + \dots + W_{b-1}$ n’est pas presque sûrement égal à 1) du cas *conservatif*.

Théorème 3.1. *Supposons que l’on a $\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{b-1} W(i) \neq 1\right) > 0$ et qu’il existe $q > 1$ tel que $\varphi_W(q) > 0$. Supposons aussi $q \in]1, 2]$ ou $\varphi_W(2) > 0$.*

1. $(F_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément, presque sûrement et en norme L^q , quand $n \rightarrow \infty$, vers une fonction höldérienne $F = F_W$.
2. $F = \sum_{i=0}^{b-1} \mathbf{1}_{[i/b, (i+1)/b]} \left(F(i/b) + W(i) F_i \circ S_i^{-1} \right)$, où $S_i(t) = (t + i)/b$, les objets aléatoires W, F_0, \dots, F_{b-1} sont indépendants, les F_i ayant même loi que F et l’égalité ayant lieu presque sûrement.

Dans le cas conservatif, on a la généralisation non triviale suivante de la construction classique de fonctions auto-affines [61], qui correspond au cas de poids déterministes. En particulier, la seconde partie fournit de façon un peu inattendue des fonctions continues auto-affines en loi, nulle part localement höldériennes, et qui exhiberont de nouveaux comportements multifractals (cf. section 3.2).

Théorème 3.2. *Supposons $\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{b-1} W(i) = 1\right) = 1$.*

1. *S’il existe $q > 1$ tel que $\varphi_W(q) > 0$, on a les mêmes conclusions que dans l’énoncé précédent.*

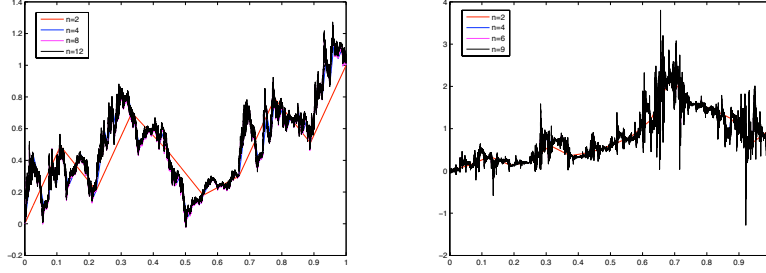


FIGURE 4 – Gauche : Convergence uniforme d’une cascade conservative à valeurs réelles, dans la cas non critique : $F_{W,n}$ pour $n \in \{2, 4, 8, 12\}$ ($b = 3$). Droite : Convergence uniforme d’une cascade conservative à valeurs réelles, dans la cas critique : $F_{W,n}$ pour $n \in \{2, 4, 6, 9\}$ ($b = 4$).

2. (Cas critique) Supposons $\lim_{q \rightarrow \infty} \varphi_W(q) = 0$, c’est-à-dire $\mathbb{P}(\forall 0 \leq i \leq b-1, |W(i)| \leq 1) = 1$ et $\sum_{i=0}^{b-1} \mathbb{P}(|W(i)| = 1) = 1$.

Supposons aussi que l’on a $\mathbb{P}(\text{card}\{i : |W(i)| = 1\} = 1) < 1$ et qu’il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que, presque sûrement, pour tout i tel que $0 \leq i < b$, on ait

$$|W_i| \leq \gamma$$

ou

$$|W_i| = 1 \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{i-1} W(k), \sum_{k=0}^i W(k) \right) \in \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Alors, $(F_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement uniformément vers une limite $F = F_W$ nulle part localement höldérienne, et qui satisfait la partie 2 du théorème 3.1.

La relation d’auto-affinité en loi exprimée par le théorème 3.1.2 doit être vue comme une extension de (5). Insistant alors sur un point déjà abordé dans la section 2.1.3, nous remarquons que l’égalité en loi qui en résulte est la même que celle satisfaite par un processus de Lévy stable composé avec l’intégrale indéfinie d’une mesure de Mandelbrot indépendante.

Les fonctions limites construites précédemment peuvent-elles se décomposer comme processus monofractal en temps multifractal ? On s’attend à ce que cela soit le cas sous certaines hypothèses, puisqu’il en est ainsi dans le cas déterministe [76]. On conjecture cependant que cela ne soit pas vrai en général (voir la discussion relative au cas critique conservatif dans [13]). Nous aurons besoin d’une définition.

Définition 3.1. Si $\beta > 0$ et $\varphi_W(\beta) > -\infty$, alors pour $w \in \mathcal{A}^*$ posons

$$W^{(\beta)}(w) = b^{\varphi_W(\beta)}(|W_{w0}|^\beta, \dots, |W_{w \cdot b^{-1}}|^\beta).$$

Nous avons $\varphi_{W^{(\beta)}}(q) = \varphi_W(\beta q) - q\varphi_W(\beta)$ pour tout $q > 0$. En particulier, $\varphi_{W^{(\beta)}}(1) = 0$, et s'il existe $q \in]1, 2[$ tel que $\varphi_{W^{(\beta)}}(q) > 0$, nous notons $F_{W^{(\beta)}}$ la fonction croissante obtenue comme limite uniforme presque sûre de

$$F_{W^{(\beta)},n}(t) = \int_0^t W_{u|1}^{(\beta)} W_{u|2}^{(\beta)} \dots W_{u|n}^{(\beta)} b^n du$$

dans les théorèmes 3.1 et 3.2. La fonction $F_{W^{(\beta)}}$ est presque sûrement strictement croissante si les $|W_j|$ sont presque sûrement strictement positifs.

Sous des hypothèses fortes, on a le résultat suivant [13] illustré par la figure 5.

Théorème 3.3. *Supposons que l'on a $\mathbb{P}(W \in \mathbb{C}^b \setminus \mathbb{R}_+^b) > 0$ et $\varphi_W > -\infty$ sur \mathbb{R} et que les hypothèses du théorème 3.1 ou du théorème 3.2(1) soient vérifiées.*

Soit $\beta = \min\{q : \varphi_W(q) = 0\}$. Supposons que $\varphi_W(q) > 0$ pour tout $q > \beta$. Alors $\beta > 1$, $F_{W^{(\beta)}}$ est non dégénérée et, avec probabilité 1, la fonction $B_{1/\beta} = F_W \circ F_{W^{(\beta)}}^{-1}$ est monofractale d'exposant de Hölder égal à $1/\beta$.

Notons que lorsque les poids W_j sont réels et de valeur absolue presque sûrement égale à une constante $b^{-1/\beta}$, le changement de temps se réduit à l'identité et la fonction limite F est un objet monofractal obtenu par cascade multiplicative. Dans le cas non conservatif, on obtient un processus qui partage beaucoup de propriétés avec le mouvement brownien fractionnaire de même indice, mais qui est de construction plus directe; ce fait remarquable fut l'une des toutes premières motivations de Mandelbrot pour considérer les cascades signées. Cependant, l'exposant $1/\beta$ est contraint d'appartenir à $]1/2, 1[$ d'après le théorème 3.1 (consulter [16] pour une étude spécifique du cas monofractal).

3.1.2 Convergence faible vers un mouvement brownien en temps multifractal

Lorsque les hypothèses du théorème 3.1 sont violées, il est naturel de chercher une renormalisation du processus $F_{W,n}$ qui le fasse converger en loi vers un objet non trivial. Dans le cas où les poids sont positifs, des résultats récents provenant de l'étude des marches aléatoires de branchement fournissent de telles normalisations. Sous certaines hypothèses : (1) dans le cas

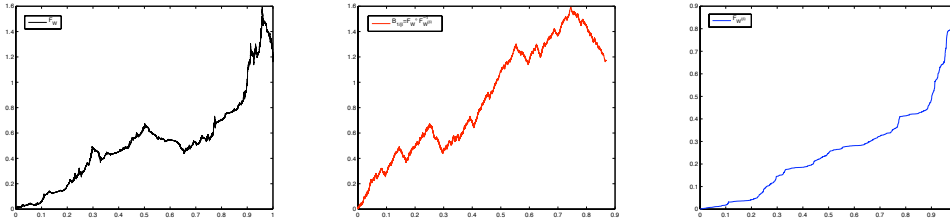


FIGURE 5 – La fonction limite F_W à droite de la figure 3.1.1 (gauche) s’écrit comme la fonction monofractale $B_{1/\beta} = F_W \circ F_{W^{(\beta)}}^{-1}$ d’exposant $H = 1/\beta \approx 0.7168$ (centre) en le temps multifractal $F_{W^{(\beta)}}$ (droite).

critique où $\varphi'(1) = 0$, $n^{1/2}F'_{W,n}$ converge en probabilité, mais pas presque sûrement ; la mesure limite est, à un coefficient multiplicatif près, la limite faible de la suite $\tilde{\mu}_{W,n}(dt) = -F'_{W,n}(t) \log(F'_{W,n}(t)/b^n)dt$ (voir [28, 63]), dont l’analyse multifractale est faite dans [8] ; (2) dans le cas $\varphi'(1) < 0$, notant β l’unique racine de φ^* dans $(0, 1)$, $n^{3/2\beta}b^{n\beta}F'_{W,n}$ converge faiblement en loi vers un multiple de la dérivée d’un subordonateur de Lévy stable L_β d’indice β composé avec l’intégrale indéfinie de la mesure critique $\tilde{\mu}_{W^{(\beta)}}$, considérée indépendamment de L_β [67, 18] (on pourra aussi consulter [93] pour le cas des cascades canoniques lognormales).

Pour les cascades signées, il existe aussi une normalisation naturelle, qui dans certains cas fait converger faiblement le processus vers un mouvement brownien en temps multifractal. Nous ferons les hypothèses suivantes.

1. La cascade est non conservative et les composantes de W sont réelles.
2. $\varphi_W > -\infty$ sur \mathbb{R}_+ .
3. $\varphi_W(2) \leq 0$ et φ_W est croissante.

Il résulte de ces hypothèses que $|W_j| \leq 1$ p.s. pour tout j , et aussi que les poids ne sont pas positifs (sinon on aurait $\varphi_W(1) = 0 \geq \varphi_W(2)$, ce qui contredirait la croissance de φ_W puisque cette fonction est concave) ; en particulier, on n’est pas sous les hypothèses du théorème 3.1, et un calcul direct montre que la martingales $F_n(1)$ n’est pas bornée dans L^2 . Plus précisément,

$$\mathbb{E}(|F_n(1)|^2) \sim \begin{cases} \sigma^2 b^{-n\varphi_W(2)} \text{ avec } \sigma^2 = \frac{\mathbb{E}(|\sum_{i=0}^{b-1} W_i|^2) - 1}{\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{b-1} |W_i|^2) - 1} & \text{si } \varphi_W(2) < 0 \\ \sigma^2 n \text{ avec } \sigma^2 = \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(W_i W_j) & \text{si } \varphi_W(2) = 0 \end{cases}.$$

De plus, (3) implique $\varphi_{W^{(2)}}(q) > 0$ pour tout $q > 1$. La fonction croissante $F_{W^{(2)}}$ (cf. définition 3.1) est par conséquent non dégénérée.

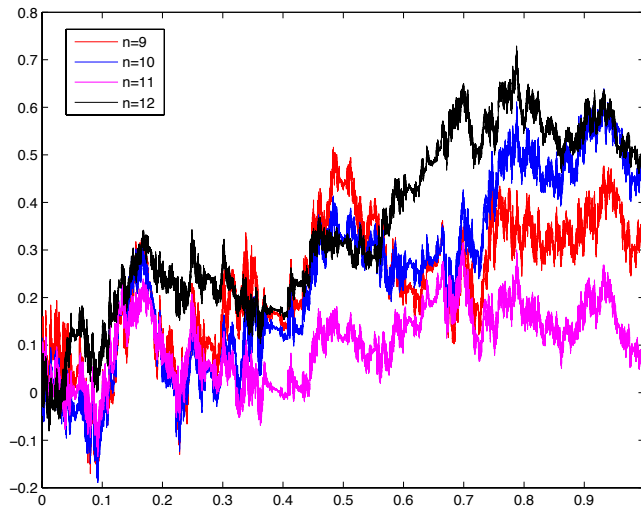


FIGURE 6 – Convergence faible de $F_n/\sqrt{\mathbb{E}(F_n(1)^2)}$ vers un mouvement brownien en temps multifractal dans le cas non conservatif.

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses précédentes, la fonction continue aléatoire $F_n/\sqrt{\mathbb{E}(F_n(1)^2)}$ converge en loi vers $B \circ F_{W^{(2)}}$, où B est un mouvement brownien standard indépendant de $F_{W^{(2)}}$.*

3.2 Analyse multifractale de la rugosité du graphe de F

L'analyse multifractale des fonctions limites F obtenues dans les théorèmes 3.1 et 3.2 est un raffinement de celle de la mesure μ . On considère maintenant l'exposant de Hölder associé aux oscillations d'ordre 1 de F ,

$$h_F(t) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \text{Osc}_F([t-r, r+r])}{\log(r)}$$

et ses ensembles de niveau

$$E_F(h) = \{t \in [0, 1] : h_F(t) = h\} \quad (h \geq 0).$$

L'exposant $h_F(\cdot)$ doit être vue comme une mesure de l'aspect plus ou moins rugueux du graphe de F en tout point : la rugosité en t est d'autant plus grande que l'amplitude de l'oscillation $\text{Osc}_F([t-r, r+r]) = \sup\{|F(u) - F(v)| : u, v \in [t-r, r+r]\}$ est contrôlé par une puissance de r petite, i.e. que $h_F(t)$ est petit.

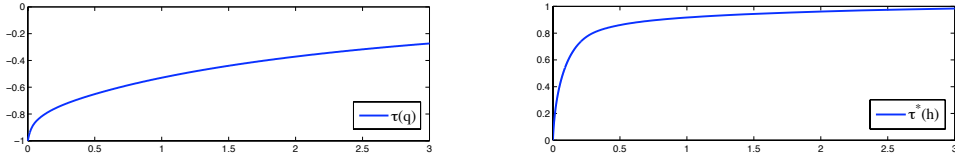


FIGURE 7 – Fonction τ_F (gauche) et sa transforme de Legendre (droite) donnant un spectre multifractal croissant et supporté par $[0, \infty]$ dans la limite d’une cascade conservative critique.

Soit

$$\tau_F(q) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sup \{ \sum_i \text{Osc}_F(B_i)^q \}}{\log(r)},$$

le supremum étant pris sur toutes les familles d’intervalles fermés disjoints deux à deux B_i de diamètre $2r$ et centrés sur $\text{supp}(F')$, où F' est la dérivée de F au sens des distributions. C’est une version adaptée à l’étude des ensembles $E_F(h)$, et indépendante d’une grille donnée, de la fonction d’énergie libre τ_μ . On a l’énoncé suivant, volontairement flou sur ses hypothèses pour éviter une discussion de cas un peu fastidieuse. On le trouve détaillé et complété dans [11], où l’on propose une analyse multifractale plus fine de F (voir aussi [47, 48, 49, 19, 9] pour avoir une idée précise du formalisme multifractal pour les fonctions, et en particulier [48] qui discute de façon approfondie de la conjecture de Frisch-Parisi).

Théorème 3.5. *Sous des hypothèses naturelles, avec probabilité 1, pour tout $h \geq 0$, $E_F(h)$ est non vide si et seulement si $\tau_F^*(h) \geq 0$, et dans ce cas $\dim E_F(h) = \tau_F^*(h)$.*

Il résulte de cet énoncé que pour les limites de cascades multiplicatives signées conservatives et critiques (théorème 3.2), le spectre multifractal de F , c’est-à-dire l’application $h \mapsto \dim E_F(h)$, a son extrémité gauche en $(0, 0)$ et y a une pente infinie. Ce cas de figure extrême semble n’avoir été jusqu’ici observé sur aucune autre construction naturelle [3, 5, 19] ou générique [48, 51]. De plus, il peut être combiné avec la propriété de F d’avoir un spectre croissant et couvrant tous les exposants de l’intervalle $[0, \infty]$, lorsque $\varphi'_W(0+) = -\infty$. Ceci est illustré par la figure 7.

Cependant, les ensembles $E_F(h)$ ne sont qu’indirectement reliés à la rugosité apparente du graphe, puisqu’ils vivent dans le support de F . Cela conduit à considérer le *spectre de rugosité* qui donne les dimensions de Hausdorff des

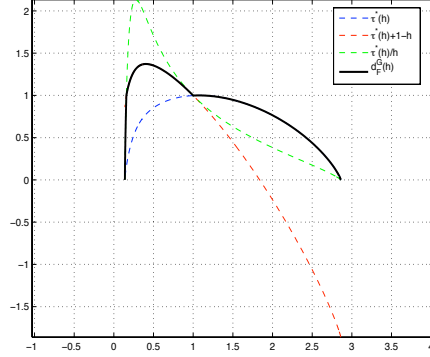


FIGURE 8 – Exemple de spectre de rugosité $h \mapsto \dim G_F(h)$.

ensembles obtenus en relevant dans le graphe de F les ensembles $E_F(h)$, c'est à dire les dimensions de Hausdorff des ensembles

$$G_F(h) = \{(t, F(t)) : t \in E_F(h)\} \quad (h \geq 0).$$

On a le résultat suivant [52], qui est le premier du genre pour les processus stochastiques multifractals.

Théorème 3.6. *dans le cas non conservatif, sous des hypothèses naturelles, et pour F à valeurs réelles, avec probabilité 1, on a*

$$\dim \text{Graph}(F) = 1 - \tau(1),$$

et, pour tout $h \geq 0$ tel que $E_F(h) \neq \emptyset$, on a

$$\dim E_F(h) = \tau_F^*(h)$$

et

$$\dim G_F(h) = \left(\frac{\dim E_F(h)}{h} \wedge (\dim E_F(h) + 1 - h) \right) \vee \dim E_F(h).$$

Références

- [1] E. Aidekon, Z. Shi, Martingale ratio convergence in the branching random walk, arXiv :1102.0217.
- [2] M. Arbeiter et N. Patschke, Random self-similar multifractals. *Math. Nachr.* **181** (1996), 5–42.

- [3] A. Arneodo, E. Bacry, et J.F. Muzy, Random cascades on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.* **39** (1998), 4142–4164.
- [4] K. Astala, P. Jones, A. Kupiainen, E. Saksman, Random curves by conformal welding. à paraître dans Acta Math.
- [5] J.M. Aubry et S. Jaffard, Random wavelet series. *Commun. Math. Phys.* **227** (2002), 483–514.
- [6] E. Bacry et J.F. Muzy, Log-infinitely divisible multifractal processes. *Commun. Math. Phys.* **236**, 449–475.
- [7] E. Bacry, A. Gloter, M. Hoffmann, et J.F. Muzy, Multifractal analysis in a mixed asymptotic framework. *Annals of Applied Probability*, **20(5)** (2010), 1729–1760.
- [8] J. Barral, Continuity of the multifractal spectrum of a random statistically self-similar measure. *J. Theoretic. Probab.* **13**, (2000), 1027–1060.
- [9] J. Barral, J. Berestycki, J. Bertoin, A.-H. Fan, B. Haas, S. Jaffard, G. Miermont, J. Peyrière, Quelques interactions entre analyse, probabilités et fractals. *Panoramas et synthèses* 32 (2010).
- [10] J. Barral et A.H. Fan, Covering numbers of different points in the Dvoretzky covering, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 275–317.
- [11] J. Barral, et X. Jin, Multifractal analysis of complex random cascades. *Commun. Math. Phys.*, **219** (2010), 129–168.
- [12] J. Barral, X. Jin, B.B. Mandelbrot, Uniform convergence for complex $[0, 1]$ -martingales, *Ann. Appl. Probab.*, **20** (2010), 1205–1218.
- [13] J. Barral, X. Jin, et B.B. Mandelbrot, Convergence of signed multiplicative cascades, *Ann. Appl. Probab.*, **20** (2010), 1219–1252.
- [14] J. Barral, et B.B. Mandelbrot, Multifractal products of cylindrical pulses, *Probab. Theory Relat. Fields.* **124** (2002), 409–430.
- [15] J. Barral et B.B. Mandelbrot, Random Multiplicative Multifractal Measures I, II, III. In Lapidus, M. and Frankenhuijsen, M. V. ed. *Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* **72** (2004), 3–90.
- [16] J. Barral et B.B. Mandelbrot, Fractional multiplicative processes. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat.*, **45** (2009), 1116–1129.
- [17] J. Barral, J. Peyrière et Z.-Y. Wen, Dynamics of Mandelbrot cascades, *Probab. Th. Relat. Fields*, 144 (2009), 615–631.
- [18] J. Barral, R. Rhodes, et V. Vargas, Limiting laws of supercritical branching random walks, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **350** (2012) 535–538.

- [19] J. Barral, et S. Seuret, From multifractal measures to multifractal wavelet series. *J. Fourier Anal. Appl.* **11** (2005), 589–614.
- [20] J. Barral et S. Seuret, Heterogeneous ubiquitous systems in \mathbb{R}^d and Hausdorff dimension, *Bull. Braz. Math. Soc.*, 38 (2007), 476–515.
- [21] J. Barral et S. Seuret, The singularity spectrum of Lévy processes in multifractal time. *Adv. Math.* **214** (2007), 437–468.
- [22] T. Bedford, Dimension and dynamics for fractal recurrent sets, *J. London Math. Soc.*, **1986**, 89–100.
- [23] F. Ben Nasr, Mandelbrot random measures associated with substitution, *CR Acad. Sc. Paris Sér. I Math*, **304** (1987), 255–258.
- [24] F. Ben Nasr, I. Bhourri, et Y. Heurteaux, The validity of the multifractal formalism : results and examples. *Adv. in Math.* **165** (2002), 264–284.
- [25] I. Benjamini, O. Schramm, KPZ in one dimensional random geometry of multiplicative cascades, *Comm. Math. Phys.*, **289** (2009), no. 2, 653–662.
- [26] J. Bertoin, Subordinators : examples and applications. Lectures on probability theory and statistics, St-Flour, LNM 1717. Springer, 1997.
- [27] J.D. Biggins, Uniform Convergence of Martingales in the Branching Random Walk. *Ann. Prob.*, **20** (1992), 137–151.
- [28] J.D. Biggins, et A.E. Kyprianou, Seneta-Heyde norming in the branching random walk, *Ann. Probab.*, **25** (1997), 337-360.
- [29] T. Bohr, D. Rand, The entropy function for characteristic exponents, *Physica D : Nonlinear Phenomena* Volume 25, Issues 1-3, March-April 1987, 387–398.
- [30] R. Bowen, The Hausdorff dimension of quasi-circles, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 11–25.
- [31] G. Brown, G. Michon, et J. Peyrière, On the multifractal analysis of measures. *J. Statist. Phys.* **66**, no. 3-4 (1992), 775–790.
- [32] Z. Buczolich, S. Seuret, Singularity spectrum of generic α -Holder regular functions after time subordination. A paraître dans *J. Fourier Anal. Appl.*
- [33] P. Collet, F. Koukiou, Large deviations for multiplicative chaos. *Commun. Math. Phys.*, **147** (1992), 329–342.
- [34] P. Collet, J. Lebowicz, et A. Porzio, The dimension spectrum of some dynamical systems, *J. Stat. Phys.*, **47**, Numbers 5-6 1987, 609-644.
- [35] B. Duplantier, S. Sheffield, Duality and the Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov relation in Liouville quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.* 102,150603 (2009), no. 15.

- [36] R. Durrett, et R. Liggett, Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete.* **64** (1983), 275–301.
- [37] A. Dvoretzky, On covering a circle by randomly placed arcs, *Pro. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956), 199–203.
- [38] R.S. Ellis, Entropy, large deviations, and statistical mechanics, Springer-Verlag, 1985.
- [39] K.J. Falconer, The multifractal spectrum of statistically self-similar measures. *J. Theor. Prob.* **7** (1994), 681–702.
- [40] A.H. Fan, On Markov-Mandelbrot martingales, *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), 967–982.
- [41] U. Frisch et G. Parisi, Fully developed turbulence and intermittency in turbulence, *Proc. International school of physics "Enrico Fermi", on Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, course 88, edited by M. Ghil, North Holland (1985), 84–88.
- [42] U. Frisch, P.L. Sulem, et M.J. Nelkin, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.* **87** (1978), 719–736.
- [43] Y. Guivarc'h, Sur une extension de la notion de loi semi-stable. *Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Stat.* **26** (1990), 261–285.
- [44] T.C Halsey, M.H.Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, et B.I. Shraiman, Fractal measures and their singularities : the characterisation of strange sets. *Phys. Rev. A.* **33** (1986), 1141–1151.
- [45] H.G. Hentschel et I. Procaccia, The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica 8D* (1983), 435-444.
- [46] R. Holley et E.C. Waymire, Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random fractals. *Ann. Appl. Probab.* **2** (1992), 819–845.
- [47] S. Jaffard, Oscillations spaces : Properties and applications to fractal and multifractal functions, *J. Math. Phys.* **39** (8) (1998), 4129–4141.
- [48] S. Jaffard, On the Frisch-Parisi Conjecture. *J. Math. Pures Appl.*, **79**(6) (2000), 525–552.
- [49] S. Jaffard, Wavelets techniques in multifractal analysis. In Lapidus, M. and Frankenhuijsen, M.V. ed. *Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* **72**(2) (2004), 91–151.

- [50] S. Jaffard et B.B. Mandelbrot, Peano-Pólya motions, when time is intrinsic or binomial (uniform or multifractal). *Math. Intelligencer*. **19**, 21–26.
- [51] S. Jaffard, Y. Meyer, On the pointwise regularity of functions in critical Besov spaces, *J. Funct. Anal.* **175** (2000), 415–434.
- [52] X. Jin, The graph and range singularity spectra of b -adic independent cascade functions, *Adv. Math.*, 226 (2011), 4987-5017.
- [53] J.-P. Kahane, *Sur le modèle de turbulence de Benot Mandelbrot*. C.R. Acad. Sci. Paris, **278** (1974), 567–569.
- [54] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge University Press, 1985.
- [55] J.-P. Kahane, Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*. **9** (1985), 105–150.
- [56] J.-P. Kahane, Positive martingales and random measures. *Chi. Ann. of Math.* **8B1** (1987), 1–12.
- [57] J.-P. Kahane, Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **23** (1987), 289–296.
- [58] J.-P. Kahane, Produits de poids aléatoires et indépendants et applications. In Bélair J. and Dubuc, S. ed. *Fractal Geometry and Analysis*, 277–324, 1991.
- [59] J.-P. Kahane et J. Peyrière, Sur certaines martingales de B. Mandelbrot. *Adv. Math.* **22** (1976), 131–145.
- [60] A.N. Kolmogorov, Précisions sur la structure locale de la turbulence dans un fluide visqueux aux nombres de Reynolds élevés, *Mécanique de la trubulence, Colloq. intern. CNRS Marseille 1961*, Editions CNRS 1962, 447–451.
- [61] N. Kôno, On self-affine functions. *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986), 259–269.
- [62] Q. Liu, Sur une équation fonctionnelle et ses applications : une extension du théorème de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement, *Adv. Appl. Prob.* **29** (1997), 353–373.
- [63] Q. Liu, On generalized multiplicative cascades, *Stoch. Proc. Appl.*, **86** (2000), 263–286.
- [64] Q. Liu, Asymptotic Properties and Absolute Continuity of Laws Stable by Random Weighted Mean. *Stoch. Proc. Appl.* **95** (2001), 83-107.
- [65] Q. Liu et A. Rouault, Limit theorems for Mandelbrot’s multiplicative cascades. *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000), no. 1, 218–239.

- [66] Q. Liu, E. Rio, et A. Rouault, Limit theorems for multiplicative processes. *J. Theoret. Probab.* **16** (2003), no. 4, 971–1014.
- [67] T. Madaule, Convergence in law for the branching random walk seen from its tip, arXiv :1107.2543.
- [68] B.B. Mandelbrot, Self-Similar Error Clusters in Communication Systems and the Concept of Conditional Stationarity. *IEEE Transactions on Communication Technology* **13** (1965), 71–90.
- [69] B.B. Mandelbrot, Renewal sets and random cutouts, *Z. Wahrsch. v. Geb.* **22** (1972), 145–157.
- [70] B.B. Mandelbrot, On Dvoretzky coverings for the circle, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **22** (1972), 158–160.
- [71] B.B. Mandelbrot, Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence, Statistical Models and Turbulence. In Rosenblatt, M. and Atta, C.V. ed. *Lectures Notes in Physics.* **12** (1972), 333–351. Springer–Verlag, New York.
- [72] B.B. Mandelbrot, Les Objets fractals : forme, hasard, et dimension, Flammarion, 1973.
- [73] B.B. Mandelbrot, Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyennes pondérées. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **278**, 289–292 et 355–358, (1974).
- [74] B.B. Mandelbrot, Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid. Mech.* **62** (1974), 331–358.
- [75] B.B. Mandelbrot, A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the “dimension” $f(\alpha)$. Fractals’ physical origin and properties (Erice, 1988), 329, *Ettore Majorana Internat. Sci. Ser. Phys. Sci.*, 45, Plenum, New York, 1989.
- [76] B.B. Mandelbrot, Fractals and Scaling in Finance : Discontinuity, Concentration, Risk. Springer, 1989.
- [77] B.B. Mandelbrot, Multifractal Power Law Distributions : Negative and Critical Dimensions and Other Anomalies, Explained by a Simple Example., *J. Stat. Phys.* **110** Nos. 3–6 (2003)
- [78] G.M. Molchan, Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades. *Commun. Math. Phys.* **179**, 681–702 (1996)
- [79] E.A. Novikov et R.W. Stewart, Intermittence of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy diddipation, *Isvestia Akademii Nauk SSR Earia Geofizicheskaja* **3** (1964), 408–413.

- [80] L. Olsen, A multifractal formalism, *Adv. Math.* **116** (1995), 92–195.
- [81] S. Orey, Random arcs on the circle, University of Minnesota, 1971.
- [82] M. Ossiander et E.C. Waymire, Statistical estimation for multiplicative cascades. *Ann. Stat.* **28** (2000), 1–29.
- [83] J. Peyrière, Turbulence et dimension de Hausdorff. *C. R. Acad. Sc. Paris* 278 (1974), 567–569.
- [84] J. Peyrière, Calculs de dimensions de Hausdorff. *Duke Math. J.* 44 (1977), 591–601.
- [85] J. Peyrière, A Vectorial Multifractal Formalism, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **72.2** (2004), 217–230.
- [86] B. Rajput, et J. Rosinski, Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probab. Th. Relat. Fields* **82** (1989), 451–487.
- [87] R. Rhodes, V. Vargas, KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures, *ESAIM Probab. Stat.*, doi :10.1051/ps/2011110 (2010).
- [88] D. Ruelle, Repellers for real analytic maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2** (1982), 99–107.
- [89] S. Seuret, On multifractality and time subordination for continuous functions. *Adv. Math.* **220** (2009), 936–963.
- [90] L. Shepp, Covering the circle with random arcs, *Israel J. Math.* **11** (1972), 328–345.
- [91] L. Shepp, Covering the line with random arcs, *Z. Wahrsch. v. Geb.* **23** (1972), 163–170.
- [92] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Mathematica*, **1984**, 259–277.
- [93] C. Webb, Exact asymptotics of the freezing transition of a logarithmically correlated random energy model, *J. Stat. Phys.*, **145** (2011), 1595–1619.
- [94] A.M. Yaglom, The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **16** (1966), 49–52.