MESURES ENGENDRÉES PAR MULTIPLICATIONS

par

Julien Barral, Aihua Fan et Jacques Peyrière

Table des matières

1. Introduction

Les produits infinis de fonctions peuvent engendrer des objets très variés lorsqu'ils ne convergent pas vers une fonction. Ainsi, pour étudier l'algèbre des mesures sur un groupe abélien localement compact, et en particulier établir son asymétrie, Hewitt et Zuckerman [**116**] ont été amenés à considérer des *produits de Riesz* de la forme $\prod_{j\geq 1}(1 + \mathrm{Re}\, a_j\gamma_j)$, où les a_j sont des nombres complexes tels que $|a_j| \leq 1$ et les γ_j sont des caractères d'un groupe abélien compact vérifiant certaines conditions d'indépendance. De tels produits convergent rarement ponctuellement ou même presque partout par rapport à la mesure de Haar. En revanche, ils convergent faiblement vers une mesure positive.

Des produits infinis de fonctions aléatoires ont été considérés par Novikov et Stewart [**178**] et par Yaglom [**225**] dans un cadre restreint, puis les cascades multiplicatives ont été introduites dans leur forme conservative et sur une grille régulière dans [**224**] et sous forme de martingales par B. Mandelbrot [**164, 165, 167, 168**] pour décrire la turbulence et, plus généralement, les phénomènes intermittents (tels la répartition des minéraux rares dans l'écorce terrestre). Là encore, la convergence ponctuelle de ces produits n'a pas de sens et l'objet limite est une mesure aléatoire. Ces cascades sont susceptibles de beaucoup de généralisations, qui ne seront pas toutes ici abordées pour rester dans le cadre d'un article visant un public assez large. Il est à noter que les cascades multiplicatives et les processus de fragmentation présentent quelque parenté.

Mentionnons aussi que les recouvrements aléatoires et la percolation sur les arbres relèvent de cette problématique : il s'agit en effet de produits infinis de fonctions indicatrices aléatoires [**68, 69**].

L'étude des cascades multiplicatives [**167, 168, 169, 138**] a conduit au concept de *multifractal*. Ce concept, au début [**113, 108**] assez vague de "mélange d'ensembles de dimensions différentes" portant chacun une singularité höldérienne a connu différentes étapes de formalisation dans les années 80 ([**112, 48**]) puis dans les années 90 ([**40, 185, 124**]). Il se trouve que cette genèse des multifractals s'est faite indépendamment du procédé de Ruelle, basé sur la thermodynamique, de calcul de dimension de Hausdorff, alors qu'ils ont une parenté certaine. De nos jours l'analyse multifractale est un ensemble d'outils qui s'appliquent à de nombreuses situations, notamment en théorie ergodique. Au début c'était un moyen d'analyse de la régularité locale des mesures et des fonctions, mais on s'est assez vite aperçu que c'était un concept d'analyse qui permet, étant donné un espace métrique (E, d) et une collection de propriétés $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$ telles que les ensembles $E_\alpha = \{t \in E : t \text{ vérifie } P_\alpha\}$ soient disjoints, de comparer la taille de ces ensembles à l'aide de leurs dimensions fractales. Ainsi peut-on dire aussi que l'on fait de l'analyse multifractale en théorie de l'ubiquité, quand par exemple on calcule les dimensions de Hausdorff des nombres irrationnels approchés à une vitesse donnée par les nombres rationnels ([**128, 109, 53, 125, 43**]), ou quand on étudie les ensembles de points où la loi du logarithme itéré est violée pour le mouvement brownien [**187**] : $E_\alpha = \left\{ t \in [0,1] : \limsup_{h\to 0} \frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = \alpha \right\}$, $\alpha > 1$.

Dans ce texte, nous abordons produits de Riesz, mesures de Gibbs, cascades de Mandelbrot et certaines de leurs généralisations comme objets d'étude et aussi outils naturels d'analyse, une place importante étant consacrée à leur analyse multifractale et ses applications.

Le chapitre 2 présente quelques propriétés des produits de Riesz. Le chapitre 3 introduit et dégage quelques propriétés fondamentales d'une large classe de fonctions positives définies sur l'ensemble des cylindres d'un espace symbolique sur un alphabet fini. Cette classe de fonctions, dites "presque multiplicatives", contient les mesures de Gibbs du formalisme thermodynamique, mais aussi d'autres exemples qui apparaissent naturellement dans l'étude des projections de ces mesures sur des ensembles auto-similaires ou auto-affines. Le chapitre 4 introduit la notion de T-martingale (ou chaos multiplicatif), qui est l'objet abstrait introduit par J.-P. Kahane afin de formaliser les modèles de turbulence de B. Mandelbrot. On dégage les principaux résultats de convergence connus pour ces objets, ainsi que des propriétés de finitude des moments de leur masse totale ; ces résultats ne seront démontrés que dans le cas particulier, mais fondamental, des cascades canoniques de Mandelbrot. Enfin, on montre comment résoudre une question de convergence de séries de Fourier lacunaires déterministes à l'aide de produits de Riesz aléatoires vus comme T-martingales.

Les chapitres 2 à 4 sont indépendants, mais nous verrons que les trois familles de mesures qui y sont construites ne sont pas sans intersection. Ces mesures sont en général singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Quand elles possèdent des propriétés d'invariance d'échelle, il devient possible de décrire précisément leur distribution aux petites échelles, en étudiant dans un premier temps leur dimension, puis leur analyse multifractale. Elles peuvent également être utilisées pour mettre en évidence les propriétés fines d'objets qui leurs sont intimement liés. Le chapitre 5 introduit et explore la notion de dimension d'une mesure, et le chapitre 6 développe un formalisme multifractal très général. Ces deux chapitres sont ensuites utilisés dans la description des propriétés multifractales des mesures presque multiplicatives dans le chapitre 7, et des cascades de Mandelbrot sur un espace symbolique dans le chapitre 8. Le chapitre 7 aborde aussi l'analyse multifractale des réalisations géométriques des mesures de Gibbs sur des ensembles auto-similaires ou auto-affines, tandis que le chapitre 8 propose plusieurs applications de l'analyse multifractale des cascades de Mandelbrot à la description d'autres objets naturels. Le chapitre 9 est consacré à des applications fondamentales de l'étude des mesures de type T-martingales ou Gibbs dans la résolution de problèmes de percolation et de recouvrement.

2. Produits de Riesz

Nous commençons en décrivant une classe de mesures engendrées par multiplication, certainement la première à avoir été considérée, qui émane naturellement de l'analyse de Fourier. Il s'agit des produits de Riesz. Nous nous plaçons d'abord dans le cadre général des groupes abéliens compacts, puis nous examinons trois exemples concrets de tels groupes.

Deux questions seront particulièrement discutées, l'une est la convergence presque partout d'une série trigonométrique lacunaire par rapport à un produit de Riesz et l'autre est celle de l'absolue continuité d'un produit de Riesz par rapport à un autre. A travers les produits de Riesz on abordera aussi la notion de quasi bernoullicité qui jouera un rôle important dans l'analyse multifractale des mesures presque multiplicatives.

2.1. Des mesures produits aux produits de Riesz. — Les mesures de Bernoulli sont certainement les plus simples parmi les mesures engendrées par multiplication. Ces mesures sont bien étudiées en probabilité comme modèle probabiliste classique. Soit $m \geq 2$ un entier. Soit $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_{m-1})$ un vecteur de probabilité, i.e. $p_j \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$. Sur l'espace produit $\Sigma_m^+ = \{0, 1, \cdots, m-1\}^{\mathbb{N}}$, le vecteur de probabilité $\mathbf{p}$ définit une mesure de probabilité $\mu_{\mathbf{p}}$, dite mesure produit infini de Bernoulli, de la façon suivante

$$\mu_{\mathbf{p}}([x_0, x_1, \cdots, x_n]) = p_{x_0} p_{x_1} \cdots p_{x_n}$$

où $[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ désigne le cylindre constitué des points $y \in \Sigma_m^+$ tels que $y_j = x_j$ pour $0 \leq j \leq n$. En vertu du théorème d'extension de Carathéodory, $\mu_{\mathbf{p}}$ s'étend d'une façon unique à la tribu borélienne. Il est à rappeler que les variables X_n $(n \geq 0)$ définies sur Σ_m^+ par $X_n(x) = x_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, ayant $(p_0, p_1, \cdots, p_{m-1})$ comme la loi de probabilité commune.

Voici une généralisation. Soit $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ $(n \geq 0)$ une suite d'espaces de probabilité. Sur l'espace produit mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\Omega = \prod_{n=0}^{\infty} \omega_n$ et $\mathcal{A} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$, on peut définir une mesure, produit infini de mesures μ, de façon suivante

$$\mu(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)\cdots\mu_n(A_n)$$

pour $A_j \in \mathcal{A}_j$ $(0 \le j \le n)$. Ainsi on obtient un bon modèle de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sur lequel les variables aléatoires X_n $(n \ge 0)$ définies par $X_n(\omega) = \omega_n$ sont indépendantes, ayant μ_n comme lois de probabilité.

On se donne pour tout $n \ge 0$ une autre mesure de probabilité ν_n sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$. On désigne par ν la mesure produit infini définie par $(\nu_n)_{n\ge 0}$. Supposons que pour tout $n \ge 0$, ν_n soit absolument continue par rapport à μ_n (ce fait est noté $\nu_n \ll \mu_n$). Sous quelle condition, a-t-on $\nu \ll \mu$? Kakutani [**140**] avait posé cette question et montré la dichotomie suivante : ou bien ν est absolument continue par rapport à μ, ou bien ν est sigulière par rapport à μ, i.e. ν et μ sont portées par deux ensembles disjoints (ce fait est noté $\nu \perp \mu$).

Théorème 2.1 ([**140**]). — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a $\nu \ll \mu$ ou $\nu \perp \mu$ selon que le produit infini suivant convergence ou diverge*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega_n} \sqrt{\frac{d\nu_n}{d\mu_n}}\; d\mu_n$$

où $\frac{d\nu_n}{d\mu_n}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de ν_n par rapport à μ_n.

Nous allons présenter une preuve de ce théorème se basant sur la théorie de martingales de Doob.

Démonstration. Tout d'abord, observons que

$$M_n = \prod_{j=0}^{n} \frac{d\nu_j}{d\mu_j}$$

est une martingale positive sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ car les $\frac{d\nu_j}{d\mu_j}$ sont μ-indépendantes. Montrer que $\nu \ll \mu$ revient à montrer que la martingale M_n est $L^1(\mu)$-convergente. Sa limite est alors nécessairement $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Posons $Z_n = \frac{d\nu_n}{d\mu_n}$ et $z_n = \mathbb{E}_\mu \sqrt{Z_n}$. Il est clair que $0 < z_n \le 1$. Considérons aussi la martingale positive suivante

$$N_n = \frac{\sqrt{Z_0}}{z_0}\frac{\sqrt{Z_1}}{z_1}\cdots\frac{\sqrt{Z_1}}{z_1} = \frac{\sqrt{M_n}}{z_0 z_1 \cdots z_n}.$$

D'après le théorème de convergence de Doob, les deux μ-martingales M_n et N_n convergent μ-presque partout vers, disons M_∞ et N_∞, respectivement. D'autre part, observons que pour tout cylindre $C = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \cdots$ $(A_j \in \mathcal{A}_j)$, on a

$$\nu(C) = \int_C M_n d\mu \quad (\forall n \geq k). \tag{1}$$

Supposons que $\prod_{n=0}^{\infty} z_n > 0$. Alors

$$\mathbb{E}_\mu N_n^2 = \frac{1}{(z_0 z_1 \cdots z_n)^2} = O(1).$$

D'après l'inégalité maximale de Doob, (M_n) est uniformément μ-intégrable et donc $L^1(\mu)$-convergente vers M_∞. Ceci implique que $\nu(C) = \int_C M_\infty d\mu$ pour tout cylindre C. Cela suffit pour conclure que $\nu \ll \mu$ et $\frac{d\nu}{d\mu} = M_\infty$.

Supposons maintenant que $\prod_{n=0}^{\infty} z_n = 0$. Observons que

$$\mathbb{E}_\mu \sqrt{M_n} = \mathbb{E}_\nu \sqrt{M_n^{-1}} = \prod_{j=0}^{n} z_j \to 0 \quad (n \to \infty).$$

et que $\mathbb{E}_\nu M_n^{-1} = 1$ d'où

$$M_n^{-1} > 0 \quad \nu\text{–}p.p.$$

Décomposons ν en $\nu = \nu_r + \nu_s$, où $\nu_r \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$. Pour tout $N > 0$, considérons $\tau_N := \nu_r 1_{\frac{d\nu}{d\mu} \leq N}$, la restriction de ν_r à $\{\omega : \frac{d\nu}{d\mu} \leq N\}$. Remarquons que $\tau_N \leq \nu$ et $\tau_N \leq N\mu$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\tau_N(\Omega)^2 = \left(\int M_n^{1/4} M_n^{-1/4} d\tau \right)^2 \leq \mathbb{E}_\tau \sqrt{M_n} \mathbb{E}_\tau \sqrt{M_n^{-1}} \leq N \mathbb{E}_\mu \sqrt{M_n} \mathbb{E}_\nu \sqrt{M_n^{-1}}$$

Le terme à droite tendant vers zero lors $n \to \infty$. On obtient $\tau_N = 0$, d'où $\nu_r = 0$. $\square$

D'après (1), la mesure produit ν peut être considérée comme la limite faible

$$\nu = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n} \frac{d\nu_j}{d\mu_j} d\mu,$$

où les variables $\frac{d\nu_j}{d\mu_j}$ sont indépendantes par rapport à la mesure produit μ prise comme mesure de référence. De ce point de vue, les produits de Riesz sont définis de façon similaire, mais par des variables non nécessairement indépendantes. En fait, les produits de Riesz sont définis sur un groupe et la mesure de référence est la mesure de Haar du groupe. Il est à noter que la construction de produits de Riesz est bien antérieure au travail de Kakutani. Depuis leur apparition, les produits de Riesz constituent un outil pour construire des mesures exhibant différents types de propriétés. La première construction est due à F. Riesz [**204**] (1918) qui a montré l'existence d'une fonction continue à variation bornée sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dont les coefficients de Fourier-Stieljes ne tendent pas vers zéro. Son exemple est

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^x \prod_{n=1}^{N} (1 + \cos 2\pi 4^n t) dt.$$

Toute fonction à variation bornée correspond à une measure de Radon. On désigne par $M(\mathbb{T})$ l'algèbre de Banach de toutes les mesures de Radon sur $\mathbb{T}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, $M(\mathbb{T})$ est l'espace dual de $C(\mathbb{T})$, l'espace des fonctions continues. Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$. Les coefficients de Fourier-Stieljes de μ sont définis par

$$\widehat{\mu}(k) = \int e^{-2\pi i k x} d\mu(x) \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Rappelons qu'une suite de mesures de probabilité μ_n converge $*$-faiblement si et seulement si $\widehat{\mu}_n(k)$ converge pour tout k. Dans ce cas, les coefficients de Fourier-Stieljes de la mesure limite sont les limites des coefficients.

Zygmund (1932) a généralisé la construction de Riesz de la façon suivante : soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs tels que $3\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ (on dit que (λ_n) est lacunaire au sens de Hadamard). Alors la limite suivante existe pour tout x :

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^x \prod_{n=1}^{N} (1 + \mathrm{Re}\ a_n e^{2\pi i \lambda_n t}) dt.$$

La fonction limite F est continue et à variation bornée. La mesure de Radon correspondante s'appelle un produit de Riesz, et sera notée formellement

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mathrm{Re}\ a_n e^{2\pi i \lambda_n t}).$$

Nous allons montrer que le produit μ_a est effectivement bien défini comme la limite de μ_n :

$$d\mu_n = P_n(t)dt \quad \text{où} \quad P_n(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + \mathrm{Re}\ a_j e^{2\pi i \lambda_j t}).$$

Observons d'abord qu'en écrivant

$$1 + \mathrm{Re}\ a_j e^{2\pi i \lambda_j t} = 1 + \frac{a_j}{2} e^{2\pi i \lambda_j t} + \frac{\overline{a}_j}{2} e^{-2\pi i \lambda_j t}$$

et en développant, on obtient l'expression suivante

$$P_n(t) = \sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n=-1,0,1} a_1^{(\epsilon_1)} \cdots a_n^{(\epsilon_n)} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n \epsilon_j \lambda_j}$$

où $a_j^{(\epsilon_j)} = \frac{\overline{a}_j}{2}, 1$ ou $\frac{a_j}{2}$ selon que $\epsilon_j = -1, 0$ ou 1. Remarquons que les coefficients de Fourier de P_n sont concentrés sur

$$W_n := \{\epsilon_1\lambda_1 + \cdots + \epsilon_n\lambda_n : \epsilon_j = -1, 0, 1\}.$$

Proposition 2.1. — *La mesure de probabilité μ_n converge $*$-faiblement vers une mesure de probabilité μ_a.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer l'existence des limites $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$). La preuve repose sur le fait que chaque élément dans W_n a une unique écriture sous la forme $\sum_1^n \epsilon_j\lambda_j$. En effet, supposons que $\sum_1^n \epsilon_j\lambda_j = \sum_1^n \epsilon'_j\lambda'_j$ avec $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$. On aurait une contradiction :

$$\lambda_n \leq |\epsilon_n - \epsilon'_n|\lambda_n \leq 2\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \leq 2(3^{-(n-1)} + \cdots + 3^{-2} + 3^{-1})\lambda_n < \lambda_n.$$

L'unicité de cette écriture implique la décomposition

$$W_{n+1} = W_n \sqcup (-\lambda_{n+1} + W_n) \sqcup (\lambda_{n+1} + W_n).$$

Par conséquent,

$$\widehat{\mu}_{n+1}(k) = \widehat{\mu}_n(k) \quad \forall k \in W_n.$$

Ainsi on a prouvé que $\lim_{N\to\infty} \widehat{\mu}_N(k) = \widehat{\mu}_n(k)$ pour tout $k \in W_n$. Si $k \notin \bigcup W_n$, on a évidemment $\lim_{N\to\infty} \widehat{\mu}_N(k) = 0$. □

La preuve montre que l'on peut bien exprimer les coefficients de Fourier-Stieljes de μ_a en terme des coefficients a_n :

$$\widehat{\mu}_a(\epsilon_1\lambda_1 + \cdots + \epsilon_n\lambda_n) = a_1^{(\epsilon_1)} \cdots a_n^{(\epsilon_n)}.$$

Cette expression nous permet de montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\mu}_a(n)|^2 = 0.$$

Alors, d'après un théorème de Wiener (cf. [**141**], p. 42), μ_a est une mesure continue (i.e., sans atome).

Voici la dichotomie de Zygmund, dite aussi pureté des produits de Riesz, qui est comparable à la dichotomie de Kakutani. La preuve présentée ici diffère de la preuve originale.

Théorème 2.2 **([228, 229])**. — *Le produit de Riesz μ_a est soit absolument continue soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue selon que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ converge ou diverge.*

Démonstration. Supposons $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhauss, il existe une suite (α_n) carré-sommable telle que

$$\alpha_n \overline{a}_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{a}_n = \infty.$$

Observons que les fonctions $e^{2\pi i \lambda_n t}$ sont orthogonales dans $L^2(dt)$ and les fonctions $e^{2\pi i \lambda_n t} - \overline{a}_n/2$ sont orthogonales dans $L^2(d\mu)$ (il suffit d'examiner $\widehat{\mu}_a(\lambda_n - \lambda_m)$). Donc, il existe une sous-suite d'entiers n_k telle que les deux suites de fonctions

$$\sum_{n=1}^{n_k} \alpha_n e^{i\lambda_n x} \text{ et } \sum_{n=1}^{n_k} \alpha_n \left(e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\overline{a}_n \right)$$

convergent à la fois Lebesgue-presque partout et μ_a-presque partout. Si μ_a n'était pas singulière, les suites de fonctions convergeraient en des points communs, et leur différence serait bornée en ces points, donc

$$\frac{1}{2} \sum \alpha_n \overline{a}_n < +\infty.$$

Cette contradiction montre que μ_a est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Cet argument provient de [**195, 196**].

Supposons maintenant que $\rho^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Posons

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\, a_n e^{2\pi i \lambda_k t}, \qquad S^*(t) = \sup_{n \geq 1} |S_n(t)|.$$

Le théorème 4.12 appliqué à la mesure de Lebesgue montre que $\|S^*\|_{L^p(dt)} \leq C\rho \frac{p^{3/2}}{p-1}$ pour tout $p > 1$. Cette estimation implique que S^* est exponentiellement intégrable, i.e.

$$\int e^{\delta S^*(t)} dt < \infty, \qquad \forall \delta > 0.$$

Or $P_n(t) \leq e^{S_n(t)} \leq e^{S^*(t)}$. Donc pour tout intervalle I on a

$$\mu_a(I) = \lim_{n \to \infty} \int_I P_n(t) dt \leq \int_I e^{S^*(t)} dt.$$

Ainsi on a démontré que μ_a est absolument continue et même $\frac{d\mu_a}{dt} \leq e^{S^*}$. □

2.2. Généralité sur les produits de Riesz. — Soit G un groupe abélien compact dont le groupe dual est noté Γ. Une suite de caractères $\Lambda = (\gamma_n)_{n\geq 1} \subset \Gamma$ est dite *dissociée* si pour tout $n \geq 1$, les caractères suivants sont tous distincts :

$$\gamma_1^{\epsilon_1}\gamma_2^{\epsilon_2}\cdots\gamma_n^{\epsilon_n} \qquad \text{où} \qquad \epsilon_j \in \begin{cases} \{-1,0,1\}, & \text{if } \gamma_j \text{ n'est pas d'ordre 2,} \\ \{0,1\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voir [**116**] pour cette notion. Ici l'opération du groupe dual est notée multiplicativement. Etant données une suite dissociée de caractères $\Lambda = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans le groupe dual Γ de G et une suite de nombres complexes $a = (a_n)_{n\geq 1}$ tels que $|a_n| \leq 1$, nous définissons une mesure de probabilité sur G, appelée *produit de Riesz*,

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty}\bigl(1 + \mathrm{Re}\ a_n\gamma_n(t)\bigr) \tag{2}$$

comme la limite faible de $\prod_{n=1}^{N}\bigl(1+\mathrm{Re}\ a_n\gamma_n(t)\bigr)\mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}t$ désigne la mesure de Haar (voir [**116**]).

Les coefficients de Fourier de μ_a sont déterminés par les coefficients $\{a_n\}$ de la façon suivante :

$$\widehat{\mu}_a(\gamma) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{(\epsilon_k)} \quad \text{si } \gamma = \gamma_1^{\epsilon_1}\gamma_2^{\epsilon_2}\cdots\gamma_n^{\epsilon_n},$$

et $\widehat{\mu}_a(\gamma) = 0$ sinon, où $a_n^{(\epsilon)} = 1, a_n/2$ ou $\bar{a}_n/2$ selon que $\epsilon = 0, 1$ ou -1. En particulier, le système $\{\gamma_n - \bar{a}_n/2\}_{n\geq 1}$ est orthogonal. Voici deux propriétés de μ_a.

Théorème 2.3 **([228])**. — *La mesure μ_a est soit absolument continue soit singulière (par rapport à la mesure de Haar) selon que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$ ou $= \infty$.*

Théorème 2.4 **([67],[198])**. — *Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres complexes. La série orthogonale $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\gamma_n(t) - \bar{a}_n/2)$ converge μ_a-presque partout si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 < \infty$.*

Le premier théorème est classique ([**228**], voir aussi [**229**]) et sa preuve est identique à celle du théorème 2.2. Pour le second, il existe une preuve combinatoire dans le cas du tore $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [**198**] et une preuve utilisant la théorie des T-martingales dans le cas général [**67**], qui sera présentée dans le chapitre 4.5. L'un des ingrédients de cette preuve est l'introduction de la mesure suivante, considérée comme une mesure aléatoire. Soit $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Notons

$$\mu_{a,\omega} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mathrm{Re}\ \ a_n \gamma_n(t + \omega_n)). \tag{3}$$

Inspirés par la dichotomie de Kakutani, nous posons les deux problèmes suivants comme conjectures.

Conjecture 1. *Soit μ_a et μ_b deux produits de Riesz, et $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Alors $\mu_a \ll \mu_b \Rightarrow \mu_{a,\omega} \ll \mu_{b,\omega}$, et $\mu_a \perp \mu_b \Rightarrow \mu_{a,\omega} \perp \mu_{b,\omega}$.*

Pour une fonction f définie sur G, on désigne par $\mathbb{E} f$ l'intégrale de f par rapport à la mesure de Haar. La véracité de la conjecture précédente impliquerait celle de la suivante

Conjecture 2. *Soit μ_a et μ_b deux produits de Riesz. Alors*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \sqrt{(1 + \mathrm{Re}\ \ a_n\gamma_n)(1 + \mathrm{Re}\ \ b_n\gamma_n)} > 0 \Longrightarrow \mu_a \ll \mu_b;$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \sqrt{(1 + \mathrm{Re}\ \ a_n\gamma_n)(1 + \mathrm{Re}\ \ b_n\gamma_n)} = 0 \Longrightarrow \mu_a \perp \mu_b.$$

La conjecture 2 a été démontrée sous la condition complémentaire $\sup_n |a_n| < 1$, sous laquelle la positivité du produit dans la condition de la conjecture équivaut à $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 < \infty$ [**41, 195, 196**]. Ce résultat partiel inclut le théorème 2.3.

Il est clair que la conjecture 2 implique la conjecture 1, grâce à l'invariance par translation de la mesure de Haar (la condition ne change pas si a_n et b_n sont remplacés par $a_n\gamma_n(\omega_n)$ et $b_n\gamma_n(\omega_n)$). Mais elles sont en réalité équivalentes. En effet, si on considère (ω_n) comme une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) ayant la mesure de Haar comme loi commune, la mesure aléatoire $\mu_{a,\omega}$ peut être vue comme une mesure de chaos multiplicatif. Comme on le verra (théorème 4.7), les conditions dans la conjecture 2 impliquent respectivement $\mu_{a,\omega} \ll \mu_{b,\omega}$ p.s. et $\mu_{a,\omega} \perp \mu_{b,\omega}$ p.s.

Examinons maintenant des produits de Riesz sur quelques groupes particuliers.

2.3. Produits de Riesz sur $\mathbb{T}$. — Revenons sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [**228**]. Rappelons que si une suite d'entiers positif $\{\lambda_n\}$ est *lacunaire à la Hadamard* au sens où $\lambda_{n+1} \geq 3\lambda_n$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite de caractères définis par

$\exp(2\pi i\lambda_n t)$ est dissociée. Ainsi on a des produits de Riesz sur $\mathbb{T}$ de la forme suivante

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \mathrm{Re}\ \ a_n e^{2\pi i\lambda_n t}). \tag{4}$$

Depuis le premier produit de Riesz, qui correspond au cas $\lambda_n = 4^n$, introduit par F. Riesz [**204**], il y a eu de nombreux travaux sur ces mesures.

Certains produits de Riesz sur $\mathbb{T}$ apparaîssent naturellement comme mesures spectrales en théorie ergodique [**176**]. Dans ce contexte, Ledrappier [**156**] a le premier exhibé une extension d'un système à spectre purement ponctuel dont une des composantes de la mesure spectrale est un produit de Riesz. Beaucoup de mesures spectrales associées à des substitutions possèdent aussi cette propriété [**202**]. Par ailleurs, Bourgain [**36**] a donné une formule, sous forme de produit de Riesz généralisé, pour la mesure spectrale d'un système dynamique général de rang 1 :

$$\prod_{n=1}^{\infty} |P_n(t)|^2$$

où $P_n(t)$ est un polynôme trigonométrique lié à la structure du système, et a montré la singularité de la mesure spectrale pour un système de Chacon (qui est un système particulier de rang 1).

Discutons la conjecture 2 dans ce cas du tore $\mathbb{T}$. Sur le disque unité $D = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ introduisons la métrique $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{1-r}}$. Pour $z_1, z_2 \in D$, la distance définie par cette métrique entre z_1 et z_2 est équivalente à

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\phi - \psi)}{\sqrt{2 - |z_1 + z_2|}}}$$

où $\phi = \arg(z_1 + z_2)$ et $\psi = \arg(z_1 - z_2)$. Alors la conjecture 2 s'énonce comme suit : $\sum d(a_n, b_n)^2 < \infty$ implique $\mu_a \ll \mu_b$ et $\sum d(a_n, b_n)^2 = \infty$ implique $\mu_a \perp \mu_b$. On sait que la conjecture est justifiée dans les deux cas suivants : (1) $\sum(\lambda_n/\lambda_{n+1})^2 < \infty$ [**148**] ; (2) $|a_n| = |b_n|$

2.4. Produit de Riesz sur $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$. — Soit $m \ge 2$ un entier. Les éléments du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ peuvent être représentés par $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ et ceux de son groupe dual par $\{1, \varphi, \cdots, \varphi^{m-1}\}$, où $\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est défini par

$$\varphi(j) = e^{\frac{2\pi i j}{m}}.$$

On appellera ce caractère φ la *fonction de Rademacher* du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Soit $\{m_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'entiers tels que $m_n \geq 2$. Considérons le groupe produit

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}.$$

Désignons par $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ la suite de fonctions de Rademacher des groupes $\mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$ $(n \geq 1)$. La fonction φ_n induit un caractère du groupe G si l'on définit $\varphi_n(t) = \varphi_n(t_n)$ pour $t = (t_k)_{k\geq 1} \in G$, que l'on appellera la n-ième *fonction de Rademacher* de G. Le groupe dual $\widehat{G}$ de G est égal à

$$\widehat{G} = \{\varphi_1^{\epsilon_1}\varphi_2^{\epsilon_2}\cdots\varphi_n^{\epsilon_n} : \quad n \geq 1; \quad 0 \leq \epsilon_j < m_n \quad (1 \leq j \leq n)\}.$$

Tout caractère dans $\widehat{G}$ correspond donc uniquement à un entier $n \geq 0$, et vice versa. Précisément, l'entier

$$n = \epsilon_1 + \epsilon_2 m_1 + \epsilon_3 m_1 m_2 + \cdots + \epsilon_k m_1 m_2 \cdots m_{k-1}$$

$(0 \leq \epsilon_j < m_j$ for $j = 1, 2, \cdots, k)$ correspond au caractère

$$\psi_n = \varphi_1^{\epsilon_1}\varphi_2^{\epsilon_2}\cdots\varphi_k^{\epsilon_k}$$

qu'on appellera n-ième *fonction de Walsh*. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(G)$ est définie par $\widehat{f}(n) = \int f(t)\overline{\psi}_n(t)\mathrm{d}t$ $(n \geq 0)$.

La suite des fonctions de Rademacher est une suite dissociée de caractères du groupe G. Alors étant donnée une suite de nombres complexes $\{a_n\}$ tels que $|a_n| \leq 1$, le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \mathrm{Re}\ a_n\varphi_n(t))$$

est un produit de Riesz sur G.

De tels produits ne sont autres que des mesures de Bernoulli inhomogènes. En fait, le produit de Riesz ci-dessus est égal à la mesure de Bernoulli inhomogène

$$\bigotimes_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m_n-1} p_j^{(n)}\delta_j, \qquad p_j^{(n)} = \frac{1}{m_n}\Big(1 + \frac{a_n}{2}e^{2\pi i j/m_n} + \frac{\bar{a}_n}{2}e^{-2\pi i j/m_n}\Big).$$

La conjecture 2 est vraie dans ce cas du groupe G et c'est alors un cas particulier du théorème de Kakutani (théorème 2.1).

D'autres produits de Riesz construits par des caractères autres que les fonctions de Rademacher sont possibles et utiles ([**77**]).

2.5. Produits de Riesz sur $\mathbb{Z}_p$. — Soit $p \geq 3$ un nombre premier et soit $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques dans le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Les caractères non-triviaux dans $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ sont de la forme

$$\gamma_{n,k}(x) = \exp(2\pi i\{p^{-n}kx\}) \qquad (n \geq 1, 1 \leq k < p^n, p \nmid k),$$

où le symbole $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire $\sum_{j=-n}^{-1} y_j p^j$ du nombre p-adique $y = \sum_{j=-n}^{\infty} y_j p^j \in \mathbb{Q}_p$ (voir [**205, 220**]). Nous pouvons facilement vérifier que l'ensemble des caractères $\{\gamma_{n,1} : n \geq 1\}$ est dissocié. Cet ensemble dissocié définit des produits de Riesz p-adiques qui ont été étudiés du point de vue des systèmes dynamiques et du point de vue de l'analyse harmonique dans [**94**].

Le produit de Riesz

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \mathrm{Re}\ a_n \gamma_{n,1}(t)\big),$$

a la propriété remarquable suivante

$$\mu_a(t + p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}P_n(t), \quad \text{avec} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \mathrm{Re}\ a_k\gamma_{k,1}(t)).$$

Alors on s'aperçoit que la mesure μ_a peut être directement définie d'après le théorème de Kolmogorov car il est facile de vérifier que $p^{-n}P_n(t)$ ne dépend que des $t_0, t_1, \cdots, t_n$ ($t = \sum_{k=0}^{\infty} t_k p^k$) et que les $P_n(t)$ sont consistants au sens de Kolmogorov.

Considérons l'application sur $\mathbb{Z}_p$ définie par $Tx = \frac{x}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\}$, qui n'est autre que le décalage à gauche lorsque $\mathbb{Z}_p$ est identifié, via le développement de Hensel, à l'espace $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$. Le produit de Riesz μ_a n'est pas T-invariant sauf si $a_n \equiv 0$. Mais, sous la condition $\sup_n |a_n| < 1$, la mesure μ_a est T-quasi-invariante si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|^2 < \infty$.

Une mesure μ sur $\mathbb{Z}_p$ est dite *quasi-Bernoulli* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}_p$ et tous $m, n \geq 1$ on ait

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\mu(I_n(x) \bigcap T^{-n}I_m(y))}{\mu(I_n(x))\mu(I_m(y))} \leq C, \tag{5}$$

où $I_n(x) = x + p^n\mathbb{Z}_p = [x_0, \cdots, x_{n-1}]$ avec $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n$. Pour le produit de Riesz μ_a, le quotient dans (5) s'exprime comme suit, ce qui nous permet de caractériser la propriété (5) par une condition portant directement sur les coefficients $\{a_n\}$. Comme $\mu_a(t+p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}P_n(t)$, par un simple calcul, on obtient

$$\frac{\mu_a(I_n(x)\bigcap T^{-n}I_m(y))}{\mu_a(I_n(x))\mu_a(I_m(y))} = \prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{\operatorname{Re}(b_k^{(n,x)}-a_k)\gamma_{k,1}(y)}{1+\operatorname{Re} a_k\gamma_{k,1}(y)}\right), \tag{6}$$

où $b_k^{(n,x)} = a_{n+k}\exp 2\pi i p^{-(p+k)}(x_0+x_1p+\cdots+x_{n-1}p^{n-1})$.

Théorème 2.5 **([94])**. — *Supposons que $|a_n|<1$ pour tout $n\geq 1$. Le produit de Riesz μ_a est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe un nombre a tel que*

$$|a|<1 \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n-a|<\infty.$$

Démonstration. Supposons que μ_a est quasi-Bernoulli. Nous avons d'abord examiner (6) dans le cas particulier $x=0$. Alors $b_k^{(n,0)} = a_{n+k}$. Posons $\theta_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\arg(a_{n+k}-a_k)$. Prenons $y\in\mathbb{Z}_p$ tel que

$$\left|\theta_{n,k}+p^{-k}(y_0+y_1p+\cdots+y_{k-1}p^{k-1})-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2p}.$$

C'est possible car dans tout intervalle de longueur $\frac{1}{p}$, en particulier celui centré en $\frac{1}{2}-\theta_{n,k}$, il existe un nombre de la forme $p^{-k}(y_0+y_1p+\cdots+y_{k-1}p^{k-1})$. Alors le produit dans (6) est majoré pour $x=0$ par

$$\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{|a_{n+k}-a_k|\cos\frac{\pi}{p}}{2}\right).$$

Ceci, avec l'inégalité $1-x\leq e^{-x}$ et la première inégalité dans (5), implique

$$-\log C\leq-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{m}|a_{n+k}-a_k|,$$

d'où

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n+k}-a_k|<\frac{2\log C}{\cos\frac{\pi}{p}}<+\infty.$$

Evidemment ceci implique que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Soit a sa limite. On a $|a|\leq 1$. Par le lemme de Fatou on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-a| = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to+\infty}|a_k-a_{n+k}|\leq\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-a_{n+k}|<+\infty.$$

On constate que $|a| \neq 1$. Sinon, $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{i\alpha}$. Alors (6) avec $m = 1$ devient

$$\frac{\mu_a(I_n(x)\cap T^{-n}I_1(y)}{\mu_a(I_n(x))\mu_a(I_1(y))} = \frac{1 + \operatorname{Re} a_{n+1} e^{2\pi i \frac{x_0+\cdots+x_{n-1}p^{n-1}+y_0p^n}{p^{n+1}}}}{1 + \operatorname{Re} a_1 e^{2\pi i \frac{y_0}{p}}}.$$

Le numérateur du membre à droite peut s'approcher de zéro, ce qui contredit (5).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit

$$\nu = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \operatorname{Re} a\gamma_{k,1}(x)).$$

Cette mesure est quasi-Bernoulli. En effet, d'après (6), on a

$$\left|\log \frac{\nu(I_n(x)\cap T^{-n}I_m(y))}{\nu(I_n(x))\nu(I_m(y))}\right| \leq \frac{|a|}{1-|a|}\sum_{k=1}^{m}\left|1 - e^{2\pi i \frac{x_0+\cdots+x_{n-1}p^{n-1}}{p^{n+k}}}\right| \leq \frac{2\pi|a|}{1-|a|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}.$$

La première inégalité est obtenue grâce à $|\log x - \log y| \leq \frac{|x-y|}{\min(x,y)}$. D'autre part, μ_a est fortement équivalente à ν en ce sens que

$$C^{-1} \leq \frac{\mu_a(I_n(x))}{\nu(I_n(x))} \leq C,$$

car

$$\left|\log \frac{\mu_a(I_n(x))}{\nu(I_n(x))}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\log(1 + \operatorname{Re} a_k\gamma_k(x)) - \log(1 + \operatorname{Re} a\gamma_k(x))| \leq C\sum_{k=1}^{\infty}|a_k - a|.$$

On en conclut que μ_a est quasi-Bernoulli. $\square$

Un résultat similaire a été obtenu pour les mesures de Bernoulli inhomogènes par T. Langlet [**152**].

Concernant la conjecture 2, un résultat partiel est obtenu dans [**94**] : Soit μ_a et μ_b deux mesures de Riesz p-adiques. Supposons que $|a_n| < 1$ pour tout n. Pour que $\mu_a \sim \mu_b$ il suffit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - b_n|^2\left(1 + \frac{\cos^2(\phi_n - \psi_n)}{2 - |a_n + b_n|}\right) < \infty.$$

On ne sait pas si cette condition est nécessaire. Remarquons que cette condition est formellement différente de celle conjecturée dans le cas du tore $\mathbb{T}$, qui est

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - b_n|^2\left(1 + \frac{\cos^2(\phi_n - \psi_n)}{\sqrt{2 - |a_n + b_n|}}\right) < \infty.$$

Voir aussi [**212**] pour d'autres informations sur ce sujet.

Nous allons dans les deux chapitres qui suivent présenter deux autres grandes classes de mesures construites de façon multiplicative, les unes déterministes, les autres aléatoires.

3. Fonctions presque multiplicatives et mesures de Gibbs

Nous allons revenir sur la notion de mesure quasi-Bernoulli introduite dans la section 2.5, mais cette fois sur un espace symbolique, en considérant d'emblée la notion plus générale de fonction presque multiplicative sur les cylindres d'un espace symbolique. Ces objets se dégagent naturellement après qu'on a rencontré la notion de mesure de Gibbs dans le formalisme thermodynamique [**38, 206**], mais se rencontrent tout aussi naturellement quand on regarde les normes des produits de Birkhoff, ou cocycles, associés à une fonction continue de l'espace symbolique dans un espace de matrices carrées d'ordre donné. Les fonctions presque additives obtenues comme logarithmes de ces objets font parties des fonctions potentiels considérées dans les développements récents du formalisme thermodynamique, dit sous-additif (voir [**61, 24, 97, 29, 175, 47**]).

Nous commençons par définir les fonctions presque multiplicatives (section 3.1). Ensuite nous introduisons les mesures de Gibbs (section 3.2) comme un exemple fondamental, parmi d'autres, de telles fonctions (sections 3.3 et 3.4). Nous donnerons ensuite des exemples de réalisations géométriques de ces mesures (section 3.5).

Rappelons d'abord quelques notations. Soit

$$\Sigma_m^+ = \{0, 1, \cdots, m-1\}^{\mathbb{N}}$$

l'espace symbolique à m symboles ($m \geq 2$). Le décalage à gauche $\sigma : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+$ est défini par

$$\sigma : (y_i)_{i\geq 0} \mapsto (y_{i+1})_{i\geq 0}.$$

Ce décalage est continu. La dynamique topologique (Σ_m^+, σ) est un modèle d'une large classe de systèmes dynamiques.

Pour tout $n \geq 0$ on définit

$$\Sigma_m^n = \{0, 1, \cdots, m-1\}^n,$$

avec la convention $\Sigma_m^0 = \{\emptyset\}$. Un élément w de Σ_m^n s'appelle aussi un mot dont la longueur n est également notée $|w|$. On note Σ_m^* l'ensemble des mots de différentes longueurs. La topologie de Σ_m^+ est métrisable : la distance entre $x, y \in \Sigma_m^+$ est

$$\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}_m(x,y) = m^{-n},$$

où n est le plus petit entier tel que $x_n \neq y_n$. Pour $y = (y_i)_{i\geq 0} \in \Sigma_m^+$ on définit le cylindre

$$[y|_n] = [y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}]$$

qui est la boule fermée de centre y et de rayon m^{-n}. Le diamètre de $[y|_n]$ sera noté $|[y|_n]|$. Si $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ sont deux mots, le mot concaténé $u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$ sera noté $u \cdot v$ ou parfois simplement uv..

On notera $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des cylindres de Σ_m^+ et pour $k \geq 0$ on notera $\mathcal{C}_m^k$ l'ensemble des cylindres de génération k.

On notera aussi $\mathcal{M}(\sigma)$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur Σ_m^+ invariantes par σ.

La dynamique (Σ_m^+, σ) admet de nombreuses mesures invariantes dont les mesures de Bernoulli, de Markov et de Gibbs qui seront des exemples fondamentaux de fonctions presque multiplicatives.

3.1. Fonctions presque multiplicatives des cylindres. — Soit ψ une fonction positive non identiquement nulle définie sur $\mathcal{C}_m$.

Définition 3.1. — *On dira que ψ est* presque multiplicative *s'il existe une suite strictement positive $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \gamma_n}{n} = 0$$

et pour tout $p, q \geq 1$ et $(w, w') \in \Sigma_m^p \times \Sigma_m^q$ on a

$$\gamma_p^{-1} \psi([w])\psi([w']) \leq \psi([w \cdot w']) \leq \gamma_p \psi([w])\psi([w']). \tag{7}$$

Si ψ est la restriction à $\mathcal{C}_m$ d'une mesure μ, on dira que μ est presque multiplicative. *Le* support *de ψ est défini par*

$$\mathrm{supp}(\psi) = \left\{ y \in \Sigma_m^+ : \forall\ n \geq 0, \psi([y|_n]) > 0 \right\}.$$

On notera $PM(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des fonctions presque multiplicatives sur $\mathcal{C}_m$. Lorsque la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est bornée par une constante γ, la mesure μ est baptisée "quasi-Bernoulli" dans [**172, 173, 40**] par référence au cas où $\gamma = 1$ et μ est une mesure de Bernoulli (voir la section 3.2.2).

Par construction, si $[S]$ désigne l'union des cylindres $[y]$ de longueur 1 tels que $\psi([y]) > 0$, alors

$$\mathrm{supp}(\psi) = \bigcap_{n\geq 0} \sigma^{-n}([S]).$$

On déduit de la propriété (7) que la suite

$$s_n = \sum_{w\in\Sigma_m^n} \psi([w]) \qquad (n \geq 1)$$

est sous-multiplicative au sens fort où

$$\gamma_n^{-1} s_n s_p \leq s_{n+p} \leq \gamma_n s_n s_p, \qquad \forall n, p \geq 1.$$

On peut donc définir la limite

$$P(\log\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{w\in\Sigma_m^n} \psi([w]) \tag{8}$$

et pour tout $n \geq 1$ on a

$$\gamma_n^{-1} \exp(nP(\log\psi)) \leq \sum_{w\in\Sigma_m^n} \psi([w]) \leq \gamma_n \exp(nP(\log\psi)). \tag{9}$$

Définition 3.2. — *On appelle $P(\log\psi)$ la pression topologique de la fonction $\log\psi$.*

La proposition suivante montre qu'à toute fonction presque multiplicative on peut associer une mesure invariante presque multiplicative.

Proposition 3.1. — *Soit $\psi \in PM(\mathcal{C}_m)$. Il existe une mesure μ invariante presque multiplicative de support égal à* $\mathrm{supp}(\psi)$ *telle que pour tout $w \in \mathcal{C}_m$ de longueur n on ait*

$$\widetilde{\gamma}_n^{-1}\psi([w]) \leq \mu([w]) \exp\big(-nP(\log(\psi))\big) \leq \widetilde{\gamma}_n \psi([w]), \tag{10}$$

la suite $(\widetilde{\gamma}_n)_{n\geq 1}$ étant une puissance de $(\gamma_n)_{n\geq 1}$. De plus, si $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors μ est unique et ergodique.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$ considérons la mesure de probabilité μ_n dont la densité par rapport à la mesure de Haar sur chaque cylindre $[w]$ de génération n est égale à la constante

$$\frac{m^n \psi([w])}{\sum_{w'\in\Sigma_m^n} \psi([w'])}.$$

Alors, si $n, p \geq 1$ et $w \in \Sigma_n$, en écrivant $\mu_{n+p}([w]) = \sum_{v\in\Sigma_m^n} \mu_{n+p}([w\cdot v])$ et en utilisant (7) dans le numérateur et le dénominateur de l'expression définissant $\mu_{n+p}([w\cdot v])$ on obtient

$$\gamma_n^{-2} \frac{\psi([w])}{\sum_{w'\in\Sigma_m^n} \psi([w'])} \leq \mu_{n+p}([w]) \leq \gamma_n^2 \frac{\psi([w])}{\sum_{w'\in\Sigma_m^n} \psi([w'])}.$$

Il découle alors de (9) que (10) a lieu avec $\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n^3$ pour toute mesure μ dans l'adhérence faible de la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$.

La mesure μ peut être choisie invariante car toute mesure prise dans l'adhérence de la suite $N^{-1}\sum_{k=0}^{N}\mu\circ\sigma^{-k}$ satisfait (10) avec $\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n^4$.

Si maintenant la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est bornée par une constante γ, alors le fait que l'on ait la propriété de mélange fort :

$$\begin{aligned}&\forall\, n,p\geq 1,\ \forall\,(w,w')\in\Sigma_m^n\times\Sigma_m^p\\ &\mu([w]\cap\sigma^{-n}[w']) = \mu([w\cdot w'])\geq \gamma^{-4}\mu([w])\mu([w']) = \gamma^{-4}\mu([w])\mu(\sigma^{-n}[w'])\end{aligned}$$

impose que μ est ergodique (cette remarque apparaît dans [**44**] à propos de la mesure harmonique sur certains répulseurs conformes. En théorie ergodique, il s'agit du lemme de Knopp [**50**]). □

Toute mesure presque multiplicative est approchée d'une certaine façon par des mesures quasi-Bernoulli, ce que montre la proposition suivante.

Proposition 3.2. — *Soit μ une mesure presque multiplicative sur Σ_m^+. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe une mesure quasi-Bernoulli μ_ε telle que pour tout $w\in\Sigma_m^*$ tel que $[w]\cap\mathrm{supp}(\mu)\neq\emptyset$, on ait*

$$e^{-|w|\epsilon}\leq\frac{\mu([w])}{\mu_\varepsilon([w])}\leq e^{|w|\epsilon}.$$

Démonstration. Pour tout $k\geq 1$ notons ν_k la restriction de μ à la tribu $\sigma(\mathcal{C}_m^k)$. Soit alors $\widetilde{\nu}_k$ la mesure définie par $\widetilde{\nu}_k = \nu_k^{\otimes\mathbb{N}^*}$ sur $\big((\Sigma_m^k)^{\otimes\mathbb{N}^*},(\sigma(\mathcal{C}_m^k)^{\otimes\mathbb{N}^*}\big) = (\Sigma_m^+,\sigma(\mathcal{C}_m))$. La presque multiplicativité de μ entraîne que pour $n\geq 1$ et $w\in\Sigma_m^n$ tel que $[w]\cap\mathrm{supp}(\mu)\neq\emptyset$ on a

$$\gamma_k^{-n/k}\leq\frac{\mu([w])}{\widetilde{\nu}_k([w])}\leq\gamma_k^{n/k}.$$

De plus, la mesure $\widetilde{\nu}_k$ est clairement quasi-Bernoulli de consante

$$\gamma = \max(\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}).$$

On peut donc prendre $\mu_\varepsilon = \widetilde{\nu}_k$ dès que $\log(\gamma_k)/k\leq\varepsilon$.□

Corollaire 3.1. — *Soit μ une mesure presque multiplicative sur Σ_m^+. Pour toute mesure invariante ν telle que* $\mathrm{supp}(\nu)\subset\mathrm{supp}(\mu)$, *la fonction*

$$-\frac{\log\mu([x|_n])}{n}$$

converge presque partout et dans $L^1(\nu)$, quand n tend vers l'infini, vers une fonction mesurable invariante $h_\nu(x)$, constante si ν est ergodique.

Lorsque $\nu = \mu$, ce résultat est un cas particulier du théorème de Shannon-McMillan-Breiman (voir section 5.5.2).
Démonstration. On note d'abord que $n^{-1} \log \mu([x|_n])$ est uniformément borné en n et en x sur $\mathrm{supp}(\mu)$. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 3.2 et du théorème ergodique sous-multiplicatif de Kingman [**150**].□

3.2. Théorème de Ruelle et mesure de Gibbs. — Les mesures de Gibbs, qui forment une classe de mesures presque multiplicatives, sont construites de la manière suivante, essentiellement fondée sur le théorème de Ruelle concernant les opérateurs de transfert.

Pour un potentiel α-hölderien $\phi : \Sigma_m^+ \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que

$$[\phi]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{\mathrm{d}(x,y)^\alpha} < \infty,$$

l'opérateur de transfert associé à ϕ est défini par

$$L_\phi f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} f(y).$$

Cet opérateur agit sur l'espace des fonctions continues $C(\Sigma_m^+)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty$, et aussi sur l'espace des fonctions α-höldériennes $\Lambda_\alpha(\Sigma_m^+)$ muni de la norme höldérienne

$$|||f||| = \|f\|_\infty + [f]_\alpha.$$

Théorème 3.1 **([206])**. — *Supposons que $\phi \in \Lambda_\alpha$. Alors*

(i) *le rayon spectral $\lambda > 0$ de $L_\phi : \Lambda_\alpha \to \Lambda_\alpha$ est une valeur propre simple à laquelle est associée une fonction propre strictement positive h. De plus, il existe une mesure de probabilité ν telle que $L_\phi^* \nu = \lambda \nu$;*

(ii) *si l'on normalise h de sorte que $\langle h, \nu \rangle = \int h d\nu = 1$, alors il existe des constantes $c > 0$ et $0 < \beta < 1$ telles que pour toute $f \in \Lambda_\alpha$ on ait*

$$\|\lambda^{-n} L_\phi^n f - \langle f, \nu \rangle h\| \leq c \beta^n |||f|||. \tag{11}$$

La quantité $P(\phi) = \log \lambda$ s'appelle la *pression topologique* de ϕ (voir également la section 3.3 pour une définition équivalente qui justifie la définition 3.2). La mesure $\mu = h\nu$, notée μ_ϕ, est ergodique, et c'est l'unique état d'équilibre de ϕ (voir la section 5.5.2 pour la définition de cette notion). Cette terminologie provient du formalisme thermodynamique. Pour une preuve du théorème 3.1, on se reportera à [**38, 206, 74, 189**].

Comme conséquence du théorème 3.1, la mesure μ_ϕ possède la *propriété de Gibbs* suivante : il existe une constante $\gamma > 1$ telle que

$$\frac{1}{\gamma} e^{S_n\phi(x)} \leq \mu_\phi([x|_n]) \exp(-nP(\phi)) \leq \gamma e^{S_n\phi(x)} \tag{12}$$

pour tout $x \in \Sigma_m^+$ et tout $n \geq 1$, où

$$S_n f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j x)$$

est la $n^{\text{ième}}$ somme de Birkhoff de ϕ prise en x.

Toute mesure fortement équivalente à μ vérifie (12) (en changeant éventuellement la valeur de γ) et est appelée *mesure de Gibbs* associée à ϕ. Notons que la notion de mesure de Gibbs s'étend à d'autres systèmes dynamiques. Par exemple, les dynamiques $T : X \to X$, où X est métrique compact, et T localement dilatante (voir [**82**], et l'exemple du cookie-cutter donné dans la section 3.5.1).

Une mesure de Gibbs μ associée à ϕ est quasi-Bernoulli, car pour tous cylindres $[w]$ et $[w']$ on a

$$\frac{1}{\gamma^3} \mu([w])\mu([w']) \leq \mu([w \cdot w']) \leq \gamma^3 \mu([w])\phi([w']). \tag{13}$$

En effet, prenons $x \in [w \cdot w']$. En utilisant trois fois la propriété de Gibbs on obtient

$$\frac{\mu([w \cdot w'])}{\exp((|w| + |w'|)P(\phi))} \geq \frac{1}{\gamma} \frac{e^{S_{|w|}\phi(x) + S_{|w'|}\phi(\sigma^{|w|}x)}}{\exp((|w| + |w'|)P(\phi))} \geq \frac{1}{\gamma^3} \mu([w])\mu([w']),$$

l'inégalité inverse se prouvant de manière analogue.

Cette propriété peut être généralisée de la manière suivante, qui précise les propriétés de dépendances faibles du processus canonique stationnaire $(x_0, \dots x_n, \dots)$ sous la loi μ_ϕ.

3.2.1. **Quasi bernoullicité forte.** —

Théorème 3.2 **([90])**. — *Soi $\mu = \mu_\phi$ la mesure de Gibbs associée à un potentiel hölderien ϕ. Soit $\omega > 1$ un nombre suffisamment grand. Pour tout cylindre D_0 et pour tout nombre quelconque de cylindres $D_1, \dots, D_k$ de longueur n on a*

$$\gamma^{-3} \left(1 - c\beta^n)\right)^k \leq \frac{\mu\left(D_0 \cap \bigcap_{j=1}^k \sigma^{-[n_0 + j(n+d)]} D_j\right)}{\prod_{j=0}^k \mu(D_j)} \leq \gamma^3 \left(1 + c\beta^n)\right)^k \tag{14}$$

où $n_0 \geq |D_0|$ et $d = \lfloor \omega n \rfloor$ ($\lfloor a \rfloor$ désignant la partie entière d'un nombre réel a).

Les événements $\sigma^{-(n_0+j(n+d)}D_j$ ne sont en général pas indépendants relativement à la mesure de probabilité μ. La quasi bernoullicité forte signifie qu'ils sont dépendants dans un sens faible. Cette dépendance faible est très utile et elle permet d'exploiter des techniques probabilistes traitant des événements indépendants. Nous illustrons l'usage de la quasi bernoullicité forte dans l'étude du recouvrement dynamique (section 9.4). Voir aussi [**86**] pour une autre application à l'étude du recouvrement dynamique.

Démonstration. Quitte à remplacer ϕ par $\phi - P(\phi)$, on peut supposer que la pression de ϕ est nulle. Remarquons d'abord que

$$D_0 \cap \bigcap_{j=1}^{k} \sigma^{-[n_0+j(n+d)]} D_j = D_0 \cap \sigma^{-|D_0|}\mathcal{B}$$

où

$$\mathcal{B} = \bigcap_{j=1}^{k} \sigma^{-[n_0-|D_0|+j(n+d)]} D_j$$

est une union finie de cylindres disjoints que nous noterons B_i. En appliquant la propriété de Gibbs (13) à $A = D_0$ et $B = B_i$, on obtient

$$\frac{1}{\gamma^3}\mu_\phi(D_0)\mu_\phi(B_i) \leq \mu_\phi(D_0 \cap \sigma^{-|D_0|}B_i) \leq \gamma^3\mu_\phi(D_0)\mu_\phi(B_i).$$

Puis sommons sur les B_i pour obtenir

$$\frac{1}{\gamma^3}\mu_\phi(D_0)\mu_\phi(\mathcal{B}) \leq \mu_\phi(D_0 \cap \sigma^{-|D_0|}\mathcal{B}) \leq \gamma^3\mu_\phi(D_0)\mu_\phi(\mathcal{B}). \tag{15}$$

Observons que l'invariance de μ_ϕ implique

$$\mu_\phi(\mathcal{B}) = \mu_\phi\left(\bigcap_{j=1}^{k} \sigma^{-[(j-1)(n+d)]} D_j\right)$$

Ceci, avec (15), montre qu'il nous reste à prouver

$$(1 - c\beta^n))^k \leq \frac{\mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} \sigma^{-[(j-1)(n+d)]} D_j\right)}{\prod_{j=1}^{k}\mu(D_j)} \leq (1 + c\beta^n))^k. \tag{16}$$

En fait, nous pouvons prouver un peu plus. Utilisons les notations $\mathbb{E}\, f = \int f \mathrm{d}\mu$ et $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(\mu)}$. De l'inégalité

$$|\mathbb{E}(f \circ \sigma^n \cdot g)| = |\mathbb{E}(f \cdot L^n g)| \leq \|L^n g\|_\infty \|f\|_1$$

(appliquée à $g-\mathbb{E}\,g$ et f) et du théorème de Ruelle, on déduit que, pour toutes fonctions höldériennes et positives g et f, on a

$$\left(1-c\frac{\beta^n\|g-\mathbb{E}\,g\|}{\mathbb{E}\,g}\right)\le\frac{\mathbb{E}(f\circ\sigma^n\cdot g)}{\mathbb{E}\,f\mathbb{E}g}\le\left(1+c\frac{\beta^n\|g-\mathbb{E}\,g\|}{\mathbb{E}\,g}\right).$$

Par récurrence, pour un nombre fini de fonctions $g_1,\cdots,g_k\in\Lambda_\alpha$ et pour des entiers $0=n_1<n_2<\cdots<n_k$ on a

$$\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-c\frac{\beta^{n_{j+1}-n_j}\|g_j-\mathbb{E}\,g_j\|}{\mathbb{E}\,g_j}\right)$$
$$\le\frac{\mathbb{E}\prod_{j=1}^k g_j\circ\sigma^{n_j}}{\prod_{j=1}^k\mathbb{E}\,g_j}\le\prod_{j=1}^{k-1}\left(1+c\frac{\beta^{n_{j+1}-n_j}\|g_j-\mathbb{E}\,g_j\|}{\mathbb{E}\,g_j}\right).$$

Afin d'obtenir (16), nous appliquons ces inégalités aux fonctions indicatrices des cylindres $g_j=\mathbf{1}_{D_j}$. Comme ces cylindres D_j ont la même longueur n, on a

$$\|g_j\|=1+2^{\alpha n},\quad\frac{1}{\mathbb{E}\,g_j}=\frac{1}{\mu(D_j)}\le\gamma 2^{n\max_x(-\phi(x))}$$

(l'inégalité est une conséquence de la propriété de Gibbs). Prenons $d:=\lfloor\omega n\rfloor$ avec ω suffisamment grand tel que $\beta^\omega 2^{\alpha+\max(-\phi)}<1$. On obtient le résultat en prenant les n_j tels que $n_1=0$ et $n_{j+1}-n_j=n+d$ pour $j\ge 2$. □

Dans les deux sections suivantes nous donnons des exemples simples et fondamentaux de mesures de Gibbs.

3.2.2. **Mesures de Markov. Approximation par mesures de Markov.**— Soit $(p_0,p_1,\cdots,p_{m-1})$ un vecteur de probabilité. Définissons

$$\phi(x)=\log p_{x_0}.$$

La mesure de Gibbs est alors la mesure de Bernoulli μ_p qui est caractérisée par

$$\mu_p([x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}])=p_{x_0}p_{x_1}\cdots p_{x_{n-1}}.$$

Plus généralement, considérons la mesure de Gibbs associée à une fonction

$$\phi(x)=\phi(x_0,x_1)$$

qui ne dépend que des deux premières coordonnées de x. Posons

$$\Phi(i,j)=e^{\phi(j,i)}.$$

(attention à l'ordre de i et j dans le membre de droite). Soit

$$h=(h(0),h(1),\cdots,h(m-1)),\quad v=(v(0),v(1),\cdots,v(m-1))$$

deux vecteurs à composantes positives, solutions respectives des systèmes

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Phi(i,j)h(j) = \lambda h(i), \qquad (0 \le i \le m-1);$$

et

$$\sum_{i=0}^{m-1} v(i)\Phi(i,j) = \lambda v(j), \qquad (0 \le j \le m-1).$$

Considérons Φ comme une matrice, h comme un vecteur colonne et v un vecteur ligne. Alors les deux systèmes s'écrivent

$$\Phi h = \lambda h, \qquad v\Phi = \lambda v.$$

C'est dire que h est un vecteur propre à droite associé à λ de la matrice Φ et v un vecteur propre à gauche. Le fait $L_\phi h = \lambda h$ équivaut à $\Phi h = \lambda h$, c'est-à-dire au premier système ci-dessus.

Supposons que h et v soient normalisés de sorte que

$$\sum_{j=0}^{m-1} h(j)v(j) = 1.$$

Posons

$$p_j = h(j)v(j), \quad p_{i,j} = \frac{v(j)\Phi(j,i)}{\lambda v(i)}.$$

Alors la mesure de Gibbs μ_ϕ est la mesure de Markov qui est caractérisée par

$$\mu_\phi([x_0, x_1, \cdots, x_n]) = p_{x_0} p_{x_0,x_1} \cdots p_{x_{n-1},x_n}.$$

Autrement dit

$$\mu_\phi([x_0, x_1, \cdots, x_n]) = \frac{1}{\lambda^n} v(x_n)\Phi(x_n, x_{n-1}) \cdots \Phi(x_2, x_1)\Phi(x_1, x_0)h(x_0)$$

ou bien

$$\mu_\phi([x_0, x_1, \cdots, x_n]) = \frac{v(x_n)h(x_0)}{\lambda^n} \; e^{\sum_{k=0}^{n-1} \phi(\sigma^k x)}.$$

L'exemple de la mesure de Markov que l'on vient d'examiner est un cas particulier de la construction générale suivante.

Soit $k \ge 1$. Soit $(p(w))_{w \in \Sigma_m^{k+1}}$ un vecteur de probabilité strictement positif tel que pour tout mot $\epsilon_1 \cdots \epsilon_k$ on ait

$$\sum_{\epsilon \in \Sigma_m^1} p(\epsilon \cdot \epsilon_1 \cdots \epsilon_k) = \sum_{\epsilon \in \Sigma_m^1} p(\epsilon_1 \cdots \epsilon_k \cdot \epsilon). \tag{17}$$

Alors, on définit de manière unique sur Σ_m^+ une mesure invariante μ en posant

$$\mu([\epsilon_1 \cdots \epsilon_{k+1}]) = p([\epsilon_1 \cdots \epsilon_{k+1}])$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\mu([\epsilon_1 \cdots \epsilon_{n+k}]) = p([\epsilon_1 \cdots \epsilon_{k+1}]) \prod_{j=2}^{n} \frac{p([\epsilon_j \cdots \epsilon_{j+k}])}{\sum_{\epsilon \in \Sigma_m^1} p([\epsilon_j \cdots \epsilon_{j+k-1} \cdot \epsilon])}.$$

Cette mesure vérifie la propriété de Markov

$$\mu([\epsilon_1 \cdots \epsilon_n]) = \mu([\epsilon_1 \cdots \epsilon_{n-1}]) \frac{\mu([\epsilon_{n-k} \cdots \epsilon_n])}{\mu([\epsilon_{n-k} \cdots \epsilon_{n-1}])} \quad (n > k).$$

De plus, la mesure μ est la mesure de Gibbs associée au potentiel, constant sur les cylindres de génération $k+1$, défini par

$$\phi(x) = \log p(x_1 \cdots x_{k+1}) - \log \sum_{\epsilon \in \Sigma_m^1} p(x_1 \cdots x_k \cdot \epsilon).$$

Pour toute mesure invariante ν de support plein, pour tout $k \geq 1$, le vecteur $p_k = \big(\nu([w_1 \cdots w_{k+1}])\big)_{w \in \Sigma_m^{k+1}}$ satisfait clairement (17). Notons ν_k la mesure associé à p_k comme μ l'était à p. Les propriétés suivantes, faisant intervenir la notion d'entropie définie à la fin de la section 5.5.2, bien qu'immédiates sont fondamentales.

Proposition 3.3. — [**81**] *Soit ν une mesure invariante de support Σ_m^+. La suite de mesures de Markov $(\nu_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement vers ν. De plus, la suite d'entropies $(h_{\nu_k})_{k\geq 1}$ converge vers h_ν.*

3.2.3. **Produits de Riesz spéciaux.** — Soit $q \geq 2$ un entier. L'application $T_q : x \mapsto qx \pmod 1$ définit une dynamique dilatante sur le tore $\mathbb{T}$. Pour tout nombre complexe a tel que $|a| < 1$, le produit de Riesz

$$\mu_a = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \mathrm{Re}\ a e^{2\pi i q^n t})$$

est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\log(1 + \mathrm{Re}\ a e^{2\pi i t})$.

L'invariance de μ_a se justifie facilement par le calcul des coefficients de Fourier. La justification utilise la similitude suivante

$$\Lambda^* = (-1 + q\Lambda^*) \cup q\Lambda^* \cup (1 + q\Lambda^*)$$

où Λ^* est l'ensemble des $\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \cdots + \epsilon_n q^n$ $(n \geq 0, \epsilon_j = -1, 0, 1)$, car cela implique que $k \in \Lambda^*$ si et seulement si $kq \in \Lambda^*$.

3.3. Mesure de Gibbs au sens faible. — Lorsque le potentiel ϕ est supposé seulement continu, il existe une mesure de probabilité μ sur Σ_m^+ et un réel $\lambda > 0$ tels que $L_\phi^*(\mu) = \lambda\mu$. En effet, l'application $\mu \mapsto \|L_\phi^*(\mu)\|^{-1} L_\phi^*(\mu)$ est continue de l'ensemble des mesures de probabilité sur Σ_m^+ dans lui même, qui est convexe et faiblement compact dans l'espace de Banach séparable des mesures signées. Donc cette application admet un point fixe d'après le théorème de Schauder-Tychonov.

On montre alors ([**145**]) en utilisant le fait que $(L_\phi^*)^n(\mu) = \lambda^n\mu$ que l'on a nécesairement $\log\lambda = P(\phi)$, où

$$P(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{w\in\Sigma_m^n} \sup_{x\in[w]} e^{S_n\phi(x)} \tag{18}$$

est la pression topologique de ϕ (cf. [**206**]). De plus, le comportement local de μ est lié à celui des sommes de Birkhoff de ϕ de la façon suivante [**145**] : il existe une suite positive $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(\gamma_n)}{n} = 0$ et

$$\gamma_n^{-1} e^{S_n\phi(x)} \leq \mu([x|_n]) \exp(-nP(\phi)) \leq \gamma_n e^{S_n\phi(x)} \tag{19}$$

pour tout $x \in \Sigma_m^+$ et tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que μ est presque multiplicative. Les inégalités (19) montrent que l'analyse multifractale de μ (qui est une conséquence des résultats de la section 7.1 valables pour toute mesure presque multiplicative) n'est autre que celle de la limite des moyennes de Birkhoff $S_n\phi(x)/n$.

3.4. Une construction générale de fonctions presque multiplicatives. — Les fonctions presque multiplicatives obtenues à partir de potentiels continus font naturellement partie d'une classe plus générale d'objets obtenus comme normes de produits de matrices. Nous les décrivons dans la section qui suit. Après quoi, nous proposons un schéma de construction d'objets encore plus généraux.

3.4.1. **Produits de Birkhoff de matrices strictement positives.** — Soit $M : \Sigma_m^+ \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R}_+^*)$, une application continue de Σ_m^+ à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre d à coefficients strictement positifs. La proposition qui suit est une conséquence immédiate du lemme 2.1 de [**97**]. Les mesures de Gibbs au sens faible correspondent au cas $d = 1$.

Proposition 3.4. — *L'application*

$$\psi([w]) = \sup_{x\in[w]} \|M(\sigma^{n-1}x)\cdots M(x)\|$$

appartient à $PM(\mathcal{C}_m)$ ($\|\cdot\|$ étant n'importe quelle norme de matrice).

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour la norme $\|A\| = \sum |A_{i,j}|$. Soit $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne dont les composantes sont toutes égales à 1, et $E = \mathbf{1}^t\mathbf{1}$. Lorsque A est positive, on a $\|A\| = {}^t\mathbf{1}A\mathbf{1}$. Si A et B sont deux matrices positives, on écrit $A \geq B$ pour signifier que $A_{i,j} \geq B_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$. Aussi, on a

$$\|AEB\| = \|A\mathbf{1}^t\mathbf{1}B\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est reportée à la fin de la preuve de cette proposition. Pour $n \geq 0$ et $x \in \Sigma_m^+$, notons

$$\pi_n M(x) = M\big(\sigma^{n-1}x\big) \cdots M(x).$$

***Lemme 3.1* ([97], lemma 2.1).** — *Il existe une constante C ne dépendant que de M telle que, quels que soient $p, q \geq 1$ et $x \in \Sigma_m^+$, on ait*

$$C\|\pi_p M(x)\| \, \|\pi_q M(\sigma^p x)\| \leq \|\pi_{p+q} M(x)\| \leq \|\pi_p M(x)\| \, \|\pi_q M(\sigma^p x)\|.$$

L'inégalité de droite implique clairement que $\psi([w \cdot w']) \leq \psi([w])\psi([w'])$ pour toute paire de mots $\{w, w'\}$. Ecrivons $M(x) = \big(\exp(\phi_{i,j}(x))\big)_{i,j}$ et posons $\omega_M = \max_{i,j} \omega_{\phi_{i,j}}$, où $\omega_{\phi_{i,j}}$ est le module de continuité de $\phi_{i,j}$. Enfin, définissons pour $p \geq 1$

$$\gamma_p = \exp\Big(\sum_{k=1}^{p} \omega_M(m^{-k})\Big).$$

Alors, pour tout $p \geq 1$ et $x, x' \in \Sigma_m^+$ tels que $x_{|p} = x'_{|p}$, on a

$$\|\pi_p M(x)\| \geq \gamma_p^{-1} \|\pi_p M(x')\|.$$

Donc, pour tout $p, q \geq 1$, $(w, w') \in \Sigma_m^p \times \Sigma_m^q$et $x \in [w \cdot w']$ on a

$$\|\pi_{p+q} M(x)\| \geq C\gamma_p^{-1}\big(\sup_{x' \in [w]} \|\pi_p M(x')\|\big) \, \|\pi_q M(\sigma^p x)\|,$$

ce qui implique

$$\psi([w \cdot w']) \geq C\gamma_p^{-1} \psi([w])\psi([w']).$$

□

Preuve du lemme. L'inégalité de droite provient de la sous-multiplicativité de la norme choisie.

Puisque M est continue et à valeurs dans les matrices strictement positives, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \Sigma_m^+$, on ait

$$\frac{\min_{i,j} M_{i,j}(x)}{\max_{i,j} M_{i,j}(x)} \geq dC.$$

Cela implique $M(x) \geq CEM(x)$. En utilisant cette inégalité pour $M(\sigma^{p-1}x)$, on obient

$$\begin{aligned}\|\pi_{p+q}M(x)\| &= \|\pi_q M(\sigma^p x)\pi_p M(x)\| \\ &\geq \|\pi_q M(\sigma^p x) CE \pi_p M(x)\| \\ &= C\|\pi_p M(x)\|\,\|\pi_q M(\sigma^p x)\|\end{aligned}$$

□

3.4.2. **Projections et produits croisés d'éléments de $PM(\mathcal{C}_m)$. —** Nous mettons maintenant en évidence deux procédés pour obtenir de nouveaux éléments de $PM(\mathcal{C}_m)$ à partir des éléments construits dans la section précédente.

On se donne deux espaces symboliques $\Sigma_{m_1}^+$ et $\Sigma_{m_2}^+$ et on identifie $\Sigma_{m_1m_2}^+$ à $\Sigma_{m_1}^+ \times \Sigma_{m_2}^+$ en prenant pour alphabet l'ensemble $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}$. Alors, pour tout $n \geq 0$, les éléments de $\mathcal{C}_{m_1m_2}^n$ sont les produits de cylindres $[w_1] \times [w_2]$, où $w_1 \in \Sigma_{m_1}^n$ et $w_2 \in \Sigma_{m_2}^n$.

Proposition 3.5. — *Si $\mu \in PM(\mathcal{C}_{m_1m_2})$ est la restriction d'une mesure, alors les projections de μ sur $\Sigma_{m_1}^+$ et $\Sigma_{m_2}^+$ sont respectivement des éléments de $PM(\mathcal{C}_{m_1})$ et $PM(\mathcal{C}_{m_2})$.*

Par conséquent, à partir de la mesure associée à un élément de $PM(\mathcal{C}_{m_1m_2})$ obtenu comme dans la section 3.4.1, par projection on construit des fonctions de $PM(\mathcal{C}_{m_1})$ et $PM(\mathcal{C}_{m_2})$ qui ne pourraient être obtenues autrement.

Proposition 3.6. — *Soit $\rho \in PM(\mathcal{C}_{m_1m_2})$ et $\theta \in PM(\mathcal{C}_{m_1})$. Alors, la fonction définie pour $(w_1, w_2) \in \Sigma_{m_1}^* \times \Sigma_{m_2}^*$ par*

$$\psi([w_1] \times [w_2]) = \theta([w_1]) \frac{\rho([w_1] \times [w_2])}{\sum_{w_2' \in \Sigma_{m_2}^{|w_2|}} \rho([w_1] \times [w_2'])}$$

appartient à $PM(\mathcal{C}_{m_1m_2})$.

L'élément de $PM(\mathcal{C}_{m_1m_2})$ ainsi construit n'est pas non plus de la forme définie en section 3.4.1 si θ et $\widetilde{\theta} : [w_1] \mapsto \sum_{w_2' \in \Sigma_{m_2}^+} \rho([w_1] \times [w_2'])$ ne sont pas équivalentes. Des mesures croisées presque multiplicatives de ce type se rencontrent naturellement dans l'analyse multifractale des mesures de Gibbs projetées sur des tapis de Sierpinski auto-affines (voir la section 7.4).

3.5. Mesures de Gibbs auto-conformes et auto-affines. — Nous abordons des exemples de réalisations géométriques naturelles des mesures presque multiplicatives considérées précédemment. Ceci se fait en projetant ces mesures sur des attracteurs de systèmes de fonctions conformes itérées (IFS) ou des répulseurs conformes codés par le même espace symbolique.

3.5.1. **Mesures de Gibbs sur un attracteur d'IFS ou un répulseur conforme.** — Donnons-nous un entier N supérieur ou égal à 2 et un ensemble $\mathbf{S} = \{S_0, \ldots, S_{N-1}\}$, dit système, de N fonctions strictement contractantes de $\mathbb{R}^d$ dans lui même.

Notons $\pi_{\mathbf{S}}$ l'application de Σ_N^+ dans $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\pi_{\mathbf{S}}(t) = \lim_{n\to\infty} S_{t_1} \circ S_{t_2} \circ \cdots S_{t_n}(0).$$

L'ensemble $\pi_{\mathbf{S}}(\Sigma_N)$ est l'attracteur associé aux itérations du système $\mathbf{S}$, c'est-à-dire l'unique ensemble compact non vide $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$K = \bigcup_{k=0}^{N-1} S_k(K). \tag{20}$$

On dira que le système $\mathbf{S}$ satisfait la condition de séparation dite "open set condition" (OSC) introduite dans [**122**], s'il existe un ensemble ouvert borné non vide U tel que

$$\text{(OSC)} \quad \bigcup_{k=0}^{N-1} S_k(U) \subset U \quad \text{et} \quad S_k(U) \cap S_j(U) = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

Si μ est une mesure presque multiplicative sur $\mathcal{C}_N$, sa réalisation géométrique naturelle sur K est sa projection $\mu \circ \pi_{\mathbf{S}}^{-1}$.

Dans le cas où μ est de type Bernoulli, c'est-à-dire s'il existe un vecteur de probabilités $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$ tel que $\mu = \mu_{\mathbf{p}} = \big(\sum_{k=0}^{N-1} p_i\delta_i\big)^{\otimes\mathbb{N}^*}$, alors il existe une unique mesure ν de probabilité satisfaisant l'équation

$$\nu = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \nu \circ S_k^{-1}. \tag{21}$$

On a $\nu = \mu_{\mathbf{p}} \circ \pi_{\mathbf{S}}^{-1}$ (voir [**122**]).

Si les éléments de $\mathbf{S}$ sont des similitudes (resp. des transformations affines) l'ensemble K est dit *auto-similaire* (resp. *auto-affine*), de même que ν.

Si les applications S_i sont de classe C^1, injectives et définies sur un même ouvert U tel que $S_i(U) \subset U$, et s'il existe $\gamma \in]0,1[$ telle que la différentielle de S_i soit à valeurs dans l'ensemble des similitudes de rapport de contraction inférieur à γ, alors K et ν sont dits *auto-conformes* (voir par exemple [**85**]). Nous illustrerons ces mesures par des cas concrets dans les sections 3.5.2 et 7.5.4.

Les répulseurs conformes sont des ensembles compacts munis d'une dynamique conforme expansive qui les rend facteurs d'un sous shift de type fini sur un espace symbolique unilatéral du type Σ_m^+. Il est donc naturel d'y projeter des mesures de Gibbs ou faiblement Gibbs. Pour une description approfondie de ces ensembles et des mesures de Gibbs qu'ils portent on pourra consulter [**191**], ainsi que [**163**]. Lorsque ce sous-shift est en fait le shift plein, on obtient une mesure de type auto-conforme comme décrit ci-dessus. Nous ne considérerons ici que l'exemple le plus simple des ensembles de type "cookie-cutter", qui sont des ensembles de Cantor (non linéaires) auto-conformes, et les mesures de Gibbs sur un ensemble de Cantor de ce type.

Soit U_0 et U_1 deux sous-intervalles de $[0,1]$ disjoints. Pour $i \in \{0,1\}$, soit $T_i : U_i \to [0,1]$, un difféomorphisme de classe $C^{1+\gamma}$ $(\gamma > 0)$ tel que $|T_i'| > 1$, et soit $g_i = (T_i)^{-1}$ l'inverse de T_i. Soit $T : U_0 \cup U_1 \to [0,1]$ l'application dont les restrictions à U_0 et U_1 sont respectivement T_0 et T_1. On définit alors

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{w \in \Sigma_2^n} g_{w_1} \circ \cdots \circ g_{w_n}([0,1])$$

et, pour tout $w \in \Sigma_2^n$,

$$K_w = g_{w|_1} \circ \cdots \circ g_{w|_n}(K).$$

Par construction, $T^{-1}(K) = K$, et K est l'unique sous-ensemble compact de $[0,1]$ satisfaisant cette équation. L'application

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \Sigma_2^+ & \to & K \\ & w & \mapsto & \lim\limits_{n \to \infty} g_{w|_1} \circ \cdots \circ g_{w|_n}(0) \end{array}$$

est un homéomorphisme qui conjugue les systèmes dynamiques (Σ_2^+, σ) et (K, T). Par conséquent, si φ est une fonction höldérienne définie sur K, il existe une unique mesure ergodique μ_φ sur (K, T), dite de Gibbs, pour laquelle il existe $C > 0$ et $P_\varphi \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$(22) \qquad C^{-1} \leq \frac{\mu_\varphi(K_w)}{\exp\left(S_{|w|}\varphi(x) - |w| P_\varphi\right)} \leq C, \quad (\forall\, w \in \Sigma^*,\ \forall\, x \in K_w),$$

où $P_\varphi = P(\varphi \circ \pi^{-1})$ et

$$S_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x)).$$

La mesure μ_φ n'est autre que la mesure $\mu \circ \pi^{-1}$ où μ est la mesure de Gibbs associée à $\varphi \circ \pi^{-1}$.

3.5.2. **Des mesures auto-similaires avec empiètements vues comme normes de produits de matrices ou mesures de Gibbs faibles sans empiètements.** — L'étude de la géométrie d'une mesure de Gibbs projetée sur un attracteurs d'IFS est une question très délicate non résolue en général. Cela provient du fait que les différentes copies $S_i(K)$ de K dans (20) peuvent se recouvrir de façon très complexe quand on n'est pas dans la situation géométrique simple où la condition (OSC) est satisfaite (cette situation sera illustrée dans la section 5.5.5). Nous allons décrire à l'aide d'un exemple une situation intermédiare non triviale bien comprise, entre la condition (OSC) et la situation générale, pour laquelle on contrôle les recouvrements.

Supposons que le système $\mathbf{S}$ satisfasse la propriété de *type fini* suivante :

$$d = 1, \quad S_k(x) = \rho x + b_k, \quad 0 < \rho < 1, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, N,$$

et il existe un ensemble fini Γ tel que pour tout entier $n \geq 1$, et tous mots w et w' dans Σ_N^n, notant $S_w = S_{w_1} \circ \cdots S_{w_n}$, on ait

$$\rho^{-n}|S_w(0) - S_{w'}(0)| > c \quad \textit{ou} \quad \rho^{-n}|S_w(0) - S_{w'}(0)| \in \Gamma,$$

où

$$c = (1-\rho)^{-1}\big(\max_{1\leq k\leq N} b_k - \min_{1\leq k\leq N} b_k\big).$$

Alors, la mesure ν est équivalente à la projection sur l'attracteur d'un système satisfaisant la condition (OSC) d'une mesure obtenue sur un autre espace symbolique Σ_M^+ à l'aide de la norme de produits de Bernoulli de matrices positives (mais non nécessairement strictement positive comme c'est le cas dans la construction faite dans la section 3.4.1 ; voir section 7.3) ; cette propriété non triviale est obtenue dans [**95**] (voir aussi [**217, 218, 100**]). Dans certains cas, on sait même montrer que ces normes de matrices sont équivalentes à une mesure de Gibbs au sens faible [**106, 183**] ; détaillons cette idée dans le cas de la $(2,3)$-convolution de Bernoulli sur $\mathbb{R}$, qui est définie comme suit.

On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $\{0,1,2\}$ et l'on appelle $(2,3)$-convolution de Bernoulli la loi de probabilité ν de la variable

$$X = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} X_n 2^{-n}.$$

La mesure ν est clairement portée par $[0,1]$ et on peut déduire de la définition de X qu'elle satisfait l'équation d'autosimilarité :

$$\nu = \frac{1}{3}\nu\circ S_0^{-1} + \frac{1}{3}\nu\circ S_1^{-1} + \frac{1}{3}\nu\circ S_2^{-1},$$

où $S_i(x) = x/2 + i/4$ pour $i\in\{0,1,2\}$. Le système $\{S_0, S_1, S_2\}$ ne satisfait pas l'OSC, mais il est de type fini.

Nous exposons maintenant certains résultats de la section 2.1 de [**106**]. On peut montrer par récurrence que si l'on considère le système $\widetilde{\mathbf{S}} = \{S_0, S_2\}$, alors pour tout $w\in\Sigma_2^* = \bigcup_{n\geq 0}\{0,2\}^n$, on a

$$\nu\big(S_w([0,1])\big) = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-1}}{}^t V_{w_1} P_w V,$$

où

$$P_w = P_{w_1}P_{w_2}\cdots P_{w_{|w|}},$$

et

$$V_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad V = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad P_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\quad P_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(les intervalles $S_w([0,1])$ sont les sous-intervalles dyadiques de $[0,1]$). Si l'on définit

$$\mu([w]) = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}{}^t V P_{w_1}P_{w_2}\cdots P_{w_n} V, \tag{23}$$

alors μ se prolonge naturellement en une mesure invariante sur Σ_2^+ et l'on a

$$\mu([w]) \approx 3^{-n}\|P_{w_1}P_{w_2}\cdots P_{w_n}\|.$$

De plus, la projection naturelle $\widetilde{\nu} = \mu\circ\pi^{-1}$ de μ sur la grille dyadique est telle que

$$\frac{3}{n+2} \leq \frac{\nu\big(S_w([0,1])\big)}{\widetilde{\nu}\big(S_w([0,1])\big)} \leq 3. \tag{24}$$

Nous allons montrer que la mesure μ définie par (23) est également une mesure de Gibbs au sens faible associée à un potentiel continu ϕ sur Σ_2^+.

Introduisons d'abord quelques notations.

Etant donné un mot infini $x \in \Sigma_2^+$, on peut le représenter d'une seule façon comme concaténation infinie d'une suite de mots $(w_i)_{i\geq 1}$ de sorte que chaque mot w_i ait toutes ses lettres identiques et que deux mots consécutifs ne contiennent pas la même lettre. On pose $a_i(x) = |w_i|$.

Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique entier $k_x(n)$ tel que le mot $x_{|n}$ s'écrive $w_1 \cdots w_{k_x(n)-1} \widetilde{w}_{k_x(n)}$, avec $\widetilde{w}_{k_x(n)} = w_{k_x(n)|n-s_{k_x(n)-1}} \neq \emptyset$, où $s_k = \sum_{i=1}^k a_k$. On pose $\widetilde{a}_{k_x(n)} = |\widetilde{w}_{k_x(n)}| = n - s_{k_x(n)-1}$.

Etant donnée une suite finie d'entiers positifs $(a_k)_{k\geq 0}$ on note

$$[a_0; a_1, \dots, a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

si $a_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et $[a_0; a_1, \dots] = \lim_{k\to\infty}[a_0; a_1, \dots, a_k]$ si $a_i > 0$ pour tout $i \geq 1$.

Maintenant, définissons

$$n_x = \inf\{n \geq 0 : \sigma^n x \in \{\overline{0}, \overline{2}\}\},$$

où pour $i \in \{0, 2\}$ $\overline{i}$ est le mot infini dont toutes les lettres sont égales à i. Notons que si $0 < n_x < \infty$, alors $a_1(x) + \cdots + a_{k_x(n_x)}(x) = n_x$ et donc $\widetilde{a}_{k_x(n_x)} = a_{k_x(n_x)}(x)$.

***Théorème 3.3* ([106], Theorem 2.2).** — *La mesure μ est une mesure de Gibbs au sens faible pour le potentiel*

$$\phi(x) = \begin{cases} \log(1/3) & \textit{si } n_x = 0, \\ \log([1; a_1(x), \dots, a_{k_x(n_x)-1}(x), a_{k_x(n_x)}(x)]/3) & \textit{si } 0 < n_x < \infty, \\ \log([1; a_1(x), \dots]/3) & \textit{si } n_x = \infty. \end{cases}$$

***Remarque 3.1*.** — *Par construction, on a $P(\phi) = 0$. De plus, le potentiel ϕ est normalisé de sorte que $\exp(\phi(0 \cdot x)) + \exp(\phi(2 \cdot x)) = 1$ pour tout $x \in \Sigma_2$, i.e. si l'on pose $g = \exp(\phi)$, μ est une g-mesure au sens de* [**143**].

Démonstration. Le résultat est une conséquence simple du lemme suivant.

***Lemme 3.2*.** — *Soit $\phi_1(x) = \log \mu([x_1])$ et, pour $n \geq 2$,*

$$\phi_n(x) = \log \frac{\mu([x_1 \cdots x_n])}{\mu([x_2 \cdots x_n])}.$$

La suite ϕ_n converge uniformément vers ϕ.

En effet, on a

$$\mu([x_1\cdots x_n]) = \exp\big(\sum_{k=0}^{n-1}\phi_{n-k}(\sigma^k(x))\big).$$

La démonstration du lemme repose sur les propriétés suivantes.

Lemme 3.3. — *Soit $w\in\Sigma_2^*$. Ecrivons $w=w_1\dots w_k$, les mot w_i ayant toutes leurs lettres identiques, deux mots consécutifs ne contenant pas la même lettre. Posons $a_i=|w_i|$. Alors,*

1.
$$^tVP_wV = {}^tVQ_{a_1}\cdots Q_{a_k}V,\quad \textit{où } Q_a=\begin{pmatrix} a & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. *Si l'on représente $[1;a_1,\dots,a_k]$ sous sa forme irréductible p_k/q_k, alors*
$$\begin{pmatrix} p_k\\ q_k\end{pmatrix} = Q_1Q_{a_1}\cdots Q_{a_k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \textit{donc } [1;a_1,\dots,a_k] = \frac{(1\ 0)Q_1Q_{a_1}\cdots Q_{a_k}{}^t(1\ 0)}{(1\ 0)Q_1Q_{a_1}\cdots Q_{a_k}{}^t(1\ 0)}.$$

Démonstration. Pour le point 1., il suffit d'observer que Q_0^2 est la matrice identité et que pour $a\geq 1$ on a $P_2^aQ_0 = Q_0P_0^a$. Le second point provient directement de la théorie des fractions continues.

Démonstration du lemme 3.2. Soit $x\in\Sigma_2^*$.

Si $n_x=0$, alors par définition de ϕ_n et d'après le lemme 3.3.1., on a pour $n\geq 2$

$$3\exp(\phi_n(x)) = \frac{^tVQ_nV}{^tVQ_{n-1}V} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Si $0<n_x<\infty$, on a $a_1(x)+\cdots a_{k_x(n_x)}(x)=n_x$, et pour $n>n_x$ on a

$$\begin{aligned} 3\exp(\phi_n(x)) &= \frac{^tVQ_{a_1(x)}\cdots Q_{a_{k_x(n_x)}(x)}Q_{n-n_x}V}{^tVQ_{a_1(x)-1}\cdots Q_{a_{k_x(n_x)}(x)}Q_{n-n_x}V}\\ &= \frac{(1\ 0)Q_1Q_{a_1(x)}\cdots Q_{a_{k_x(n_x)}(x)}Q_{n+1-n_x}{}^t(1\ 0)}{(0\ 1)Q_1Q_{a_1(x)}\cdots Q_{a_{k_x(n_x)}(x)}Q_{n+1-n_x}{}^t(1\ 0)}\\ &= [1;a_1(x),\dots,a_{k_x(n_x)}(x),n+1-n_x], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 3.3.2.

Si $n_x=\infty$, alors pour $n\geq 2$ on a

$$\begin{aligned} 3\exp(\phi_n(x)) &= \frac{(1\ 0)Q_1Q_{a_1(x)}\cdots Q_{a_{k_x(n)-1}(x)}Q_{\widetilde{a}_{k_x(n)}+1}{}^t(1\ 0)}{(0\ 1)Q_1Q_{a_1(x)}\cdots Q_{a_{k_x(n)-1}(x)}Q_{\widetilde{a}_{k_x(n)}+1}{}^t(1\ 0)}\\ &= [1;a_1(x),\dots,a_{k_x(n)-1}(x),\widetilde{a}_{k_x(n)}+1]. \end{aligned}$$

Désignons simplement $k_x(n)$ par k, $a_i(x)$ par a_i, et $\widetilde{a}_{k_x(n)}$ par $\widetilde{a}_k$ et écrivons maintenant $[1; a_1, \dots, a_{k-1}, \widetilde{a}_k] = p_k/q_k$ et $[1; a_1, \dots, a_{k-1}, \widetilde{a}_k + 1] = p'_k/q'_k$ sous leur forme irréductible. En utilisant la définition de ϕ et la théorie des fractions continues on obtient

$$
\begin{aligned}
3|\exp(\phi(x) - \exp(\phi_n(x)| &= \left|[1; a_1, \dots] - \frac{p'_k}{q'_k}\right| \\
&\leq \left|[1; a_1, \dots] - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p'_k}{q'_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} + \frac{1}{q_k q'_k} \leq \frac{1}{q_k} + \frac{1}{q'_k},
\end{aligned}
$$

et comme $n = a_1 + \dots + a_{k-1} + \widetilde{a}_k$, on a $q_k \geq q'_k \geq n$, d'où

$$
|\exp(\phi(x) - \exp(\phi_n(x)| \leq \frac{2}{3n}.
$$

La même inégalité est vraie pour $0 < n_x < \infty$. Par conséquent, on a bien la convergence uniforme cherchée. □

4. T-martingales

Nous abordons la notion de **T**-martingale introduite par J.-P. Kahane pour formaliser certains modèles de martingales multiplicatives à valeurs mesures considérés par B. Mandelbrot pour modéliser la dissipation d'énergie dans un fluide turbulent. La section 4.1 présente la construction générale et pose les principales questions relatives à ces objets. La section 4.2 regroupe quelques propriétés fondamentales vraies en toute généralité, et qui apportent des premières réponses à ces questions. Puis la section 4.3 distingue une classe de $[0, 1]$-martingales homogènes pour laquelle on peut obtenir des réponses très précises à ces questions. Deux exemples fondamentaux sont distingués, les cascades canoniques de Mandelbrot et les cascades de Poisson composées, qui seront utilisés dans les chapitres 8 et 9 comme outils d'analyse multifractale. Enfin, la section 4.4 considère une classe de $[0, 1]$-martingales homogènes qui a la particularité de pouvoir être vue aussi bien comme un produit de Riesz généralisé aléatoire que comme une mesure de Gibbs aléatoire. Les preuves des résultats généraux des sections 4.2 et 4.3 seront pour la plupart omises, le lecteur étant renvoyé aux articles originaux. Cependant, certaines preuves seront données dans le cas particulier des cascades canoniques de Mandelbrot, qui joue un rôle fondamental dans la théorie.

4.1. T-martingales et mesures chaotiques. —

Soit (T, d) un espace métrique compact ou localement compact et soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On se donne une filtration, c'est-à-dire une suite croissante $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ et une suite de processus aléatoires indépendants $\{P_n(t)\}_{n\geq 1}$. On écrit $P_n(t) = P_n(t,\omega)$ pour préciser que $t \in T, \omega \in \Omega$. Supposons que

(i) $P_n(t,\cdot)$ est $\mathcal{A}_n$-mesurable pour tout t ;

(ii) $P_n(\cdot,\omega)$ est borélienne pour presque tout ω ;

(iii) $P(t) \geq 0$, $\mathbb{E}\, P_n(t) = 1$ pour tout $t \in T$.

Une telle suite $\{P_n\}$ est appelée une suite de *poids* adaptée à la filtration $\{\mathcal{A}_n\}$. Posons

$$Q_n(t) = Q_n(t,\omega) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t,\omega).$$

Pour tout t fixé, $Q_n(t)$ $(n \geq 1)$ est une martingale. On dit que $Q_n(t)$ $(t \in T)$ est une martingale indexée par T ou bien une T-*martingale*.

Pour $n \geq 1$ et toute mesure de Radon positive σ sur T, ce qu'on écrit $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$, nous considérons la mesure aléatoire $Q_n\sigma$ définie par

$$Q_n\sigma(A) = \int_A Q_n(t)d\sigma(t) \qquad \big(A \in \mathcal{B}(T)\big)$$

où $\mathcal{B}(T)$ est la tribu borélienne de T. Il est clair que pour tout $A \in \mathcal{B}(T)$, $Q_n\sigma(A)$ $(n \geq 1)$ est une martingale positive. Donc elle converge presque sûrement (p.s. pour abréger).

Théorème 4.1. — [**132**] *Pour toute mesure de Radon $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$, p.s. la mesure aléatoire $Q_n\sigma$ converge faiblement vers une mesure aléatoire, qu'on notera $Q\sigma$.*

Démonstration. Pour toute fonction borélienne bornée ϕ, $\int \phi Q_n \mathrm{d}\sigma$ est une martingale L^1-bornée donc converge p.s.. Soit Φ un ensemble dénombrable de fonction continues qui est dense dans $C_b(T)$. Alors p.s. pour tout $\phi \in \Phi$, $\int \phi Q_n \mathrm{d}\sigma$ converge. Par conséquent, p.s. $Q_n d\sigma$ admet une limite faible notée $Q\sigma$, qui satisfait

$$p.s.\ \ \forall \phi \in C(T), \quad \int \phi dQ\sigma = \lim_{n\to\infty} \int \phi Q_n \mathrm{d}\sigma.$$

□

Nous pouvons considérer Q comme un opérateur qui envoie une mesure (ici σ) sur une mesure aléatoire $Q\sigma$. Nous appelons Q un *opérateur de chaos multiplicatif* et $Q\sigma$ une *mesure de chaos multiplicatif* [**167, 168, 131, 66**].

Il existe deux cas extrêmes. Le premier dans lequel $Q_n\sigma(T)$ converge p.s. vers zero, c'est-à-dire la mesure $Q\sigma$ est p.s. nulle. Le second dans lequel $Q_n\sigma(T)$ converge dans L^1 de sorte que $\mathbb{E}\, S(T) = \sigma(T)$. Si le premier cas a lieu, on dit que Q *tue* σ ou encore que σ est Q-*singulière*. Dans le second cas, on dit que Q *agit pleinement* sur σ ou bien que σ est Q-*régulière*. Ces situations sont bien décrites par l'opérateur suivant. Définissons l'opérateur $\mathbb{E}\,Q : \mathcal{M}^+(T) \to \mathcal{M}^+(T)$ par

$$(\mathbb{E}\,Q\sigma)(A) = \mathbb{E}(Q\sigma(A)) \qquad (A \in \mathcal{B}(T)).$$

Alors σ est Q-singulière (resp. Q-régulière) si et seulement si $\mathbb{E}\,Q\sigma = 0$ (resp. $\mathbb{E}\,Q\sigma = \sigma$).

Théorème 4.2. — [**132**] *Toute mesure de Radon $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$ se décompose uniquement sous la forme $\sigma = \sigma_r + \sigma_s$, où σ_r est Q-régulière et σ_s Q-singulière.*

Démonstration. (Esquisse) Pour toute mesure σ, on peut démontrer qu'il existe un borélien B dépendant de σ tel que $\mathbb{E}(Q\sigma|\mathcal{A}_n) = \mathbf{1}_B Q_n \sigma$ au sens que p.s. pour tout borélien A on ait

$$\mathbb{E}(Q\sigma(A)|\mathcal{A}_n) = \int_A \mathbf{1}_B Q_n \mathrm{d}\sigma.$$

Alors on décompose σ en prenant

$$\sigma_r = \mathbf{1}_B\sigma, \quad \sigma_s = \mathbf{1}_{B^c}\sigma.$$

□

L'opérateur $\mathbb{E}\,Q$ prolongé naturellement à l'espace des mesures de Radon $\mathcal{M}(T)$ est une projection, dont l'image (resp. le noyau) est constitué des mesures Q-régulières (resp. Q-singulières).

Maintenant nous sommes intéressés par les propriétés de la mesure aléatoire $Q\sigma$, de l'opérateur Q ou de l'opérateur $\mathbb{E}\,Q$. Voici quelques questions :

Question 1 Sous quelle condition l'opérateur Q tue-il σ ?

Question 2 Sous quelle condition l'opérateur Q agit-il pleinement sur σ ?

Question 3 Quand le moment $\mathbb{E}(S(T)^p)$ est-il fini pour un certain ordre p, positif ou négatif ?

Question 4 Quelle est la relation entre les deux mesures $Q'\sigma'$ et $Q''\sigma''$, où les deux opérateurs Q' et Q'' sont définis comme Q ?

Question 5 Quelle est la dimension de la mesure $Q\sigma$?

Question 6 La mesure $Q\sigma$ est-elle multifractale ?

Les deux dernières questions seront abordées dans des cas particuliers dans les chapitres 5, 8 et 9.

4.2. Quelques propriétés générales. — Dans la suite, nous présentons quelques résultats dans le cas général. Ils offrent soit des réponses partielles aux questions précédentes soit des méthodes que l'on peut exploiter dans des cas concrets. Des réponses complètes peuvent être obtenues dans divers cas particuliers, que nous présenterons en section 4.3.

Le résultat suivant utilise la notion de mesure de Hausdorff définie au début du chapitre 5. Le lecteur est renvoyé à [**132**] pour la preuve.

Théorème 4.3 **([132])**. — *Supposons que* $\mathcal{H}^\alpha(T) < \infty$ *où* $\mathcal{H}^\alpha$ *désigne la mesure de Hausdorff* α*-dimensionnelle et qu'il existe des nombres* $0 < h < 1$ *et* $C > 0$ *ayant la propriété que pour toute boule* B *de rayon* r *on peut trouver un entier* $n = n(B)$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in B} Q_n(t)\right)^h \leq C r^{\alpha(1-h)}. \tag{25}$$

Alors toutes les mesures de Radon sur T *sont* Q*-singulières.*

En particulier, la condition $\dim\sigma < \alpha$, accompagnée de (25), implique la Q-singularité de σ. Sans être universellement valable, ce théorème s'avère être dans bien de cas un bon outil pour démontrer la Q-singularité de σ [**132, 75**]. D'autre part, pour la Q-régularité, on a la condition L^2 suivante. La preuve est ce résultat est une conséquence directe du fait qu'une martingale est L^2-convergente si et seulement si elle est L^2-bornée.

Théorème 4.4 **([132])**. — *La martingale* $Q_n\sigma(T)$ *est* L^2*-convergente (donc* σ *est* Q*-régulière et* $\mathbb{E}(Q\sigma(T))^2 < \infty$*) si et seulement si*

$$\int\int \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\, P_n(t)P_n(s)\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) < \infty. \tag{26}$$

Supposons que σ est une mesure de probabilité Q-régulière. Voici un outil puissant pour étudier les propriétés p.s. $Q\sigma$-presque partout. Il s'agit d'une mesure $\mathcal{Q}$ sur l'espace produit $T \times \Omega$ définie par

$$\int_{T\times\Omega} \varphi(t,\omega)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t,\omega) = \mathbb{E}\int_T \varphi(t,\omega)\mathrm{d}Q\sigma(t) \tag{27}$$

pour toute fonction mesurable positive φ.

On dit que les poids $P_n(t)$ sont homogènes si pour tout n et tous $t, t' \in T$, les deux variables $P_n(t)$ et $P_n(t')$ ont la même loi de probabilité. Le résultat suivant est immédiat.

Théorème 4.5 **([138, 132])**. — *Supposons que les poids $P_n(t)$ sont homogènes. Supposons que σ est une probabilité Q-régulière. Alors les $P_n(t,\omega)$, considérés comme des variables aléatoires sur $T \times \Omega$, sont $\mathcal{Q}$-indépendantes.*

Démonstration. Soint $N \geq 1$. Etant données N fonctions boréliennes $h_1, \cdots, h_N$, un calcul simple permet d'obtenir

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \prod_{n=1}^{N} h_n(P_n(t)) = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\, h_n(P_n(t))$$

où $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$ désigne l'espérance relative à $\mathcal{Q}$ et $\mathbb{E}$ celle relative à la probabilité P. Rappelons que $\mathbb{E}\, h_n(P_n(t))$ est indépendante de t. On en déduit la $\mathcal{Q}$-indépendance. $\square$

Une application directe de ce théorème implique que p.s. pour $Q\sigma$-presque tout $t \in T$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log P_k(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\, P_k \log P_k. \tag{28}$$

Ce résultat sera exploité pour calculer la dimension de Hausdorff des cascades canoniques de Mandelbrot dans la section 5.5.3.

Etant données deux suites de poids $\{P'_n(t)\}_{n\geq 1}$ et $\{P''_n(t)\}_{n\geq 1}$, respectivement définis sur les espaces de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$, et respectivement adaptés à deux filtrations $\{\mathcal{A}'_n\}$ et $\{\mathcal{A}''_n\}$, il est évident que $\{P_n\}$ défini par $P_n(t) = P''_n(t)P'_n(t)$ est une suite de poids adaptés à $\{\mathcal{A}'_n \otimes \mathcal{A}''_n\}$, définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\Omega' \times \Omega'', \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'', P' \otimes P'')$. Désignons par Q', Q'' et Q les trois opérateurs correspondant aux trois suites de poids.

Le principe de décomposition suivant est très utile dans l'étude des questions de recouvrements aléatoires et de percolation [**130, 68**]. Il sera appliqué dans la section 9.2 à l'estimation de la dimension de Hausdorff des cascades canoniques de Mandelbrot.

Théorème 4.6 **([223, 84])**. — *Sous les conditions ci-dessus, nous avons*

(a) $Q\sigma = Q''(Q'\sigma)$ p.s. *pour toute mesure* $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$.
(b) $\sigma \in \operatorname{Im} \mathbb{E}\, Q \Rightarrow Q'\sigma \in \operatorname{Im} \mathbb{E}\, Q''$ *pour presque tout* $\omega' \in \Omega'$.
(c) $\sigma \in \operatorname{Ker} \mathbb{E}\, Q \Rightarrow Q'\sigma \in \operatorname{Ker} \mathbb{E}\, Q''$ *pour presque tout* $\omega' \in \Omega'$.
(d) $\mathbb{E}\, Q\sigma = \mathbb{E}\, Q''(\mathbb{E}\, Q'\sigma)$ *pour toute* $\sigma \in \mathcal{M}^+(T)$ *Q-régulière.*

Une preuve complète et détaillée se trouve dans [**84**]. Voir [**134, 75, 78**] pour les applications de ce résultat dans le calcul de dimensions.

Soit Q' et Q'' les deux opérateurs associés respectivement à $\{P'_n\}$ et $\{P''_n\}$. Supposons que pour tout $t \in$ fixé la loi du vecteur aléatoire $(P'_n(t), P''_n(t))$ ne dépend pas de t (nous ne supposons pas que les deux suites de poids $\{P'_n\}$ et $\{P''_n\}$ sont indépendantes).

Théorème 4.7 **([70])**. — *Sous les conditions ci-dessus, pour toute mesure σ Q'-régulière, on a*

(a) $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{E}\sqrt{P'_n P''_n} > 0 \Rightarrow$ *p.s.* $Q''\sigma \ll Q'\sigma$ *et* σ *est* Q''*-régulière.*

(b) $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{E}\sqrt{P'_n P''_n} = 0 \Rightarrow$ *p.s.* $Q''\sigma \perp Q'\sigma$.

En particulier, si la loi de P''_n ne dépend pas de n et si $P''_n \not\equiv 1$, alors $Q''\sigma \perp \sigma$ pour presque tout ω tel que $Q''\sigma \neq 0$. La preuve du dernier théorème suit l'idée utilisée dans celle du théorème de Kakutani. Voir le détail dans [**70**].

4.3. Une classe de $[0,1]$-martingales homogènes. — Les mesures de Gibbs construites dans la section 3 présentent la propriété de posséder de l'auto-similarité. Nous allons spécifier une classe de **T**-martingales dont les éléments présentent, en loi, de l'invariance par translation, et dans certain cas de l'autosimilarité. Cela permettra d'énoncer des résultats fins quant à la non dégénérescence et à la finitude des moments des martingales correspondantes. Cette classe abstraite de martingales contient les exemples fondamentaux que sont les cascades multiplicatives dites *canoniques* introduites dans [**167, 169**], ainsi que les cascades multiplicatives dites *de Poisson composées* introduites dans [**14, 8**] et leurs extensions avec les cascades infiniment divisibles dans [**4, 46**].

Si m est un entier ≥ 2 et $n \geq 0$, nous désignons par $\mathcal{F}_n^m$ la familles des intervalles m-adiques de génération n contenus dans $[0,1]$, et par $\mathcal{F}^m$ l'ensemble des sous-intervalles m-adiques de $[0,1]$. Si $I \in \mathcal{F}^m$, S_I désigne l'application affine canonique envoyant $[0,1]$ sur I.

Nous allons demander à la martingale (Q_n) de satisfaire davantage de propriétés. Nous travaillons dans $T = [0,1]$. D'autre part, nous introduisons pour la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ les propriétés suivantes :

(P1) Pour tout $n \geq 1$, le processus $P_n(t)_{t\in[0,1]}$ est homogène (c'est-à-dire la loi de la variable $P_n(t)$ est indépendante de t). On pose alors

$$\varphi(q) = q - 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_m \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Q_n>0\}} Q_n^q\right) \quad (q \in \mathbb{R}).$$

(P2) Il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tous $n \geq 1$ et $I, I' \in \mathcal{F}_n^m$, les tribus $\sigma(P_k(t),\ k > n,\ t \in I)$ et $\sigma(P_k(t),\ k > n,\ t \in I')$ soient indépendantes si la distance de I à I' est supérieure à Nm^{-n}.

(P3) Le processus $\big(P_{k+n} \circ S_I(\cdot)\big)_{k\geq 1}$ a la même loi que $(P_k(\cdot))_{k\geq 1}$ pour tout $I \in \mathcal{F}_n^m$. En particulier, sous **(P1)** on a pour $q \in \mathbb{R}$

$$\varphi(q) = q - 1 - \log_m \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{P_1>0\}} P_1^q\right).$$

Dans la suite de cette section, on prend pour mesure σ la restriction λ de la mesure de Lebesgue à $[0,1]$. On a les résultats suivants, qui sont des généralisations des résultats connus pour les cascades canoniques de Mandelbrot [**138, 136, 174, 7**] et les cascades de Poisson composées [**14, 15**], qui seront introduites dans les sections 4.3.1 et 4.3.2. D'autres exemples auxquels ces résultats s'appliquent sont décrits dans [**15**] et, comme la classe de martingales que nous étudions est stable par multiplication de deux de ses éléments indépendants, on a un moyen d'en engendrer encore de nouveaux.

Les résultats suivants sont des extensions non triviales de propriétés vraies pour les cascades canoniques de Mandelbrot, pour lesquelles nous donnerons des démonstrations des théorèmes 4.9 et 4.10.

Théorème 4.8 **(Non dégénérescence [15])**. — *Supposons* **(P1)**, **(P2)** *et* **(P3)** *vérifiées.*

1. *Si* $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,m^{-n}]} Q_n(t)) = o(n)$, *alors* $\varphi'(1^-) > 0$ *implique que* λ *est* Q*-régulière.*
2. *S'il existe* $h \in (0,1)$ *tel que* $\mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,m^{-n}]} Q_n(t)^h\big) \leq \exp(\theta(n))\,\mathbb{E}(Q_n^h)$ *avec* $\theta(n) = o(n)$, *alors* λ *est* Q*-régulière seulement si* $\varphi'(1^-) \geq 0$.

Théorème 4.9 **(Moments d'ordres positifs [15])**. — *Supposons* **(P1)** *et* **(P2)** *vérifiées. Si* $q \in (1,2]$ *et* $\varphi(q) > 0$, *la mesure* λ *est* Q*-régulière et* $Q_n\lambda(T)$ *est bornée dans* L^q. *Le même résultat est vrai pour* $q > 2$ *si* **(P3)** *est vérifiée.*

Si **(P1)**, **(P2)** *et* **(P3)** *sont vérifiées et si* $\mathbb{E}\big(\inf_{t\in[0,m^{-n}]} Q_n(t)^q\big) \geq \exp(-\theta(n))\,\mathbb{E}(Q_n^q)$ *avec* $\theta(n) = o(n)$, *alors* $Q_n\lambda(T)$ *est bornée dans* L^q *seulement si* $\varphi(q) \geq 0$.

Théorème 4.10 **(Moments d'ordres négatifs [15])**

Supposons **(P1)**, **(P2)** *et* **(P3)** *vérifiées et* $\mathbb{P}(P_1 > 0) = 1$. *Soit* $q < 0$. *S'il existe* $n \geq 1$ *tel que* $\mathbb{E}\big(\inf_{t\in[0,m^{-n}]} Q_n(t)^q\big) < \infty$ *alors* $Q\lambda(T)$ *a un moment d'ordre* q *fini.*

Nous présentons deux exemples fondamentaux auxquels s'appliquent les résultats précédents. Pour le premier, nous donnerons dans la sections 8.1 la preuve du résultat de convergence presque sûre et en norme L^p énoncé dans le théorème 4.9 ainsi que celle du résultat de finitude des moments d'ordre négatifs énoncé dans le théorème 4.10.

4.3.1. Cascades multiplicatives de Mandelbrot sur Σ_m^+ et leurs projections.— On notera λ_m la mesure uniforme sur Σ_m^+. Pour tout $n \geq 1$ on se donne une variable aléatoire $W^{(n)}$ strictement positive d'espérance 1 et une famille dénombrable $(W(w))_{w\in\Sigma_m^*}$ de variables aléatoires indépendantes telles que $W(w)$ suive la loi de $W^{(|w|)}$. On pose alors pour $n \geq 1$ et $t \in \Sigma_m^+$.

$$P_n(t) = W(t|_n).$$

A tout $u \in [0,1]$ on associe le mot infini $\widetilde{u}$ de Σ_m^+ tel que $u = \sum_{k\geq 1} \widetilde{u}_k m^{-k}$ (convenant que $\widetilde{u}_k = m-1$ pour k grand si u est m-adique et non nulle). Ensuite définissons pour chaque n une fonction aléatoire sur $[0,1]$ par

$$\widetilde{P}_n(u) = P_n(\widetilde{u}).$$

Alors la suite de fonctions aléatoires $(\widetilde{P}_n(u))_{n\geq 1}$ vérifie **(P1)** et **(P2)**. Elle vérifie **(P3)** si les variables $W^{(n)}(w)$ sont identiquement distribuées.

On a alors

$$\varphi(q) = q - 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_m \mathbb{E}((W^{(k)})^q)$$

qui se simplifie en

$$\varphi(q) = q - 1 - \log_m \mathbb{E}(W^q) \tag{29}$$

si les $W^{(n)}$ suivent la même loi qu'une variable W.

Dans ce dernier cas, introduit dans [**167, 168, 169**], le théorème 4.8.(1) indique que la suite $(Q_n\lambda_m)_{n\geq 1}$ et sa projection naturelle sur $[0,1]$, notée $(\widetilde{Q}_n\lambda)_{n\geq 1}$, sont non dégénérées si

$$\varphi'(1^-) = 1 - \mathbb{E}(W \log_m W) > 0.$$

Il s'avère que la réciproque est aussi vraie, donc que l'on a un résultat plus fort que le théorème 4.8.(2) dans ce cas (voir [**138**]).

Si $\varphi'(1^-) > 0$, alors la masse totale Y de $Q\lambda_m$ est la limite de la martingale

$$Y_n = m^{-n} \sum_{w\in\Sigma_m^n} \prod_{k=1}^{n} W(w|_k)$$

et elle satisfait l'équation :

$$Y = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} W(k) Y(k), \tag{30}$$

où $m^{-1}W(k)Y(k)$ représente la $Q\lambda_m$ masse du cylindre $[k]$, les $Y(k)$ sont des copies de Y, et les variables aléatoires $W(0), \dots, W(m-1), Y(0), \dots, Y(m-1)$ sont indépendantes. Nous verrons que cette équation joue un rôle crucial dans l'étude des propriétés de $Q\lambda_m$.

Plus généralement, pour $w \in \Sigma^*$, on a

$$\mu([w]) = m^{-|w|} Q(w) Y(w) \tag{31}$$

avec

$$Q(w) = \prod_{k=1}^{|w|} W(w|_k) \text{ et } Y(w) = \lim_{n\to\infty} m^{-n} \sum_{w' \in \Sigma_m^n} \prod_{k=1}^{n} W(w \cdot w'|_k). \tag{32}$$

De plus, les tribus $\sigma(Q(w) \ : \ w \in \Sigma_m^n)$ et $\sigma(Y(w) \ : \ w \in \Sigma_m^n)$ sont indépendantes et les $Y(w)$ sont des copies de Y indépendantes.

4.3.2. Produits de poids aléatoires poissoniens sur $[0,1]$. — La construction qui suit est introduite dans [**14**] (voir aussi [**8, 15**]). Soit ν une mesure de Radon sur $(0,1]$ et Λ la mesure Leb$\otimes \nu$, où Leb désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit W une variable aléatoire intégrable strictement positive et $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction intégrable.

Pour $\varepsilon \in (0,1]$ et $t \in [0,1]$ posons

$$\mathcal{C}_\varepsilon(t) = \big\{(s,\lambda) : \varepsilon < \lambda \le 1,\ t \le s < t+\lambda\big\}.$$

Soit S un processus de Poisson d'intensité Λ. A tout point M de S on associe une copie W_M de W de sorte que ces copies soient indépendantes et indépendantes de S. Notons

$$\Delta\mathcal{C}_n(t) = \mathcal{C}_{m^{-n}}(t) \setminus \mathcal{C}_{m^{-(n-1)}}(t).$$

Pour $t \in [0,1)$ et $n \ge 1$ soit

$$P_n(t) = \frac{\prod_{M \in S \cap \Delta\mathcal{C}_n(t)} W_M f\big(\frac{t - t_M + \beta\lambda_M}{\beta\lambda_M}\big)}{\exp\big[\Lambda(\Delta\mathcal{C}_n(t))(\mathbb{E}(W)\int_{[0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t - 1)\big]}.$$

Les fonctions $(P_n(t))_{n\ge1}$ satisfont les propriétés **(P1)** et **(P2)** et

$$\varphi(p) = p - 1 + \widetilde{\delta}\Big(p\Big[\mathbb{E}(W)\big(\int_{[0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t\big) - 1\Big] - \Big(\mathbb{E}(W^p)\big(\int_{[0,1]} f(t)^p\,\mathrm{d}t\big) - 1\Big)\Big),$$

où

$$\widetilde{\delta} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_m \Lambda(C_{m^{-n}}).$$

Si de plus il existe $\delta > 0$ tel que $\nu = \delta \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$, c'est-à-dire si Λ a une propriété d'auto-similarité, on a $\widetilde{\beta} = \beta\delta$ et **(P3)** est vérifiée. Si la fonction f est höldérienne, le théorème 4.8 s'applique, et on peut montrer qu'il y a équivalence entre non dégénérescence et $\varphi'(1^-) > 0$ sous la condition supplémentaire $\mathbb{E}(W \log^2(W)) < \infty$ (voir [**14, 15**]).

4.4. $[0,1]$**-martingales homogènes, produits de Riesz et mesures de Gibbs aléatoires.** — Nous nous intéressons à une classe de martingales homogènes construites sur $[0,1]$, dont la particularité est de converger, lorsqu'elles sont non dégénérées, vers des produits de Riesz généralisés qui sont des cas spéciaux de mesures de Gibbs aléatoires.

Soit V une fonction mesurable positive et 1-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\int_{[0,1]} V(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé $([0,1]^{\mathbb{N}}, \lambda^{\otimes\mathbb{N}})$, et b un entier ≥ 2. Définissons alors la $[0,1]$-martingale

$$Q_n(t,\omega) = \prod_{k=1}^{n} P_k(t,\omega), \text{ où } P_k(t,\omega) = V\big(b^{k-1}(t+\omega_{k-1})\big) \tag{33}$$

qui satisfait les propriétés **(P1)** et **(P3)**, mais non **(P2)**. Certains produits généraux (V pouvant dépendre de k) ont été introduits dans [**76**].

La classe de martingales ainsi construite n'a en commun que la martingale constamment égale à 1 avec celle décrite dans la section précédente, et la condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence que l'on obtient est totalement différente.

Notons toujours λ la mesure de Lebesgue. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $\widehat{V}(k) = \int_{[0,1]} V(t) e^{-2ik\pi t}\,\mathrm{d}t$. Nous avons supposé que $\widehat{V}(0) = 1$.

Théorème 4.11 **(Non dégénérescence).** — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{P}(\|Q\lambda > 0\|) > 0$ *;*

(ii) $(\|Q_n\lambda\|)_{n\geq 1}$ *est uniformément intégrable ;*

(iii) *Pour tout* $n \geq 1$, $\|Q_n\lambda\| = 1$ *presque sûrement ;*

(iv) $\|Q\lambda\| = 1$ *presque sûrement (*$Q\lambda$ *est une mesure de probabilité) ;*

(v) $\forall\, n \geq 2\ \forall\, (j_0,\dots,j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0,\dots,0\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} j_k b^k = 0 \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \widehat{V}(j_k) = 0.$

La condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence est de type algébrique. Elle force certains coefficients de Fourier $\widehat{V}(k)$ à s'annuler, et parmi eux il y en a au moins un du type $\widehat{V}(kb)$ avec $k \neq 0$. Elle est moins restrictive que la condition de dissociation que l'on impose pour construire les produits de Riesz classiques. Enfin, elle montre que la non-dégénérescence est un comportement très singulier qui n'a lieu que pour les V d'un cône fermé d'intérieur vide dans l'ensemble des fonctions mesurables positives et de moyenne 1.

Voici deux situations pour lesquelles il y a non dégénérescence :

a) Il existe $p \geq 0$ tel que $\widehat{V}(k) = 0$ pour tout $k \in (\mathbb{Z} \setminus b^p\mathbb{Z}) \cup b^{p+1}\mathbb{Z}$. C'est en particulier le cas avec $p = 0$ si

$$\sum_{k=0}^{b-1} V\Big(\frac{t+k}{b}\Big) = 1 \text{ pout tout } t \in [0,1],$$

puisque l'on a $\widehat{V}(k) = 0$ pour tout multiple non nul de b.

b) V est un polynôme trigonométrique de la forme

$$V(t) = 1 + \sum_{k\in K} \alpha_k \cos(2\pi m_k b^{p_k} t) + \beta_k \sin(2\pi m_k b^{p_k} t)$$

où K est un ensemble fini, les α_k et les β_k sont tels que $\sum_{k\in K} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} < 1$ afin que V soit positive, les p_k sont des entiers positifs et les m_k des entiers strictement positifs tous distincts tels que, pour tout $(\varepsilon_k)_{k\in K} \in \{-1,0,1\}^K \setminus \{(0,\dots,0)\}$, b ne divise pas $\sum_{k\in K} \varepsilon_k m_k$.

Si $b = 5$ et $K = \{1,3\}$, le choix $m_1 = 1$, $m_3 = 3$ convient avec p_1 et p_3 des entiers arbitraires.

Le lien avec les mesure de Gibbs aléatoires est le suivant. Lorsque la limite de la martingale $(Q_n\lambda)_{n\geq 1}$ est dégénérée, il est naturel de normaliser la martingale en considérant la suite de mesures

$$\nu_n = Q_n\lambda / \|Q_n\lambda\|.$$

Le formalisme thermodynamique pour les transformations aléatoires développé dans [**147, 146**], et plus particulièrement un théorème de type Ruelle-Perron-Frobenius, permet d'établir la convergence faible presque sûre de ν_n vers une mesure ν lorsque V est strictement positive et höldérienne. La mesure ν est une mesure de Gibbs associée au potentiel aléatoire

$$\varphi_\omega(t) = \log V(t + \omega_0),$$

où le système dynamique aléatoire est l'ensemble $\Omega \times [0,1]$ muni de la transformation

$$((\omega_n)_{n\geq 0}, t) \mapsto ((b\omega_{n+1} \mod 1)_{n\geq 0},\ bt \mod 1).$$

On peut également opérer la normalisation en cas de non dégénérescence, mais le théorème 4.11 indique que les cas de non dégénérescence coïncident avec les cas où la normalisation est neutre, puisque $\|Q_n\lambda\| = 1$, on a donc $\nu = Q\lambda$. Le théorème 4.11 donne l'ensemble des V pour lesquels on peut se passer du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius de [**147**]. Il faut avoir à l'esprit que si l'on perturbe légèrement un cas de non dégénérescence V en $\widetilde{V}$ pour lequel il y a dégénérescence, et si V est strictement positive et höldérienne, alors la normalisation précédente “récupère” la situation, en fournissant une mesure limite. Ceci est détaillé et illustré par des simulations dans la section 1 de [**10**].

Démonstration du théorème 4.11. Supposons l'assertion (v) vraie. Pour voir qu'elle entraîne les autres, il suffit d'établir (iii). Cette dernière propriété se prouve en approchant en norme L^1 la fonction V par une suite $(V_p)_{p\geq 1}$ de polynômes trigonométriques satisfaisant aussi (v). Cette suite s'obtient en convolant V avec une approximation de l'identité constituée de polynômes trigonométriques. Une fois $(V_p)_{p\geq 1}$ construite, on vérifie que (iii) est vraie automatiquement pour V_p, et on prouve facilement que pour chaque $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^n V_p\big(b^{k-1}(t+\omega_{k-1})\big)$ converge vers $\prod_{k=1}^n V\big(b^{k-1}(t+\omega_{k-1})\big)$ dans L^1 quand p tend vers l'infini.

Supposons maintenant (i) vraie. La structure de la construction montre que la mesure $\mathbb{E}(Q\lambda)$ considérée sur le tore est invariante par translation. C'est donc un multiple de la mesure de Lebesgue. Comme l'opérateur $\mathbb{E}(Q)$ est une projection et comme nous supposons $Q\lambda$ non dégénérée, on a $\mathbb{E}(Q\lambda) = \lambda$. En particulier, la martingale $\|Q_n\lambda\|$ est uniformément intégrable. Il reste à prouver (v) pour conclure. Supposons qu'il existe $n_0 \geq 2$ et $(l_0, \dots, l_{n_0-1}) \in \mathbb{Z}^{n_0} \setminus \{0, \dots, 0\}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} l_k b^k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n_0-1} \widehat{V}(l_k) \neq 0.$$

Pour $n \geq 1$ posons $Y_n = \|Q_n\lambda\|$ et prenons $j_0 = \cdots = j_{n-1} = 0$ et $(j_n, \dots, j_{n+n_0-1}) = (l_0, \dots, l_{n_0-1})$. Alors

$$\mathbb{E}\Big((Y_{n+n_0} - Y_n)\exp\big(-2i\pi \sum_{k=0}^{n+n_0-1} j_k b^k \omega_k\big)\Big) = \prod_{k=0}^{n_0-1} \widehat{V}(l_k).$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy dans L^1, ce qui contredit l'uniforme intégrabilité de cette suite. $\square$

4.5. Convergence presque sûre de séries lacunaires. — On utilise ici une technique de T-martingale pour montrer la convergence presque partout par rapport à un produit de Riesz d'une série lacunaire. C'est un cas dans lequel une méthode probabiliste a bien réussi à résoudre un problème déterministe.

Par commodité pour le lecteur, rappelons d'abord la définition d'un produit de Riesz. Soit $T = G$ un groupe abélien compact. Etant données une suite dissociée $\Lambda = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ de caractères dans le groupe dual Γ de G et une suite de nombres complexes $a = (a_n)_{n\geq 1}$ tels que $|a_n| \leq 1$, nous définissons une mesure de probabilité sur G, appelée produit de Riesz, comme la limite faible des produits partiels du produit infini.

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \mathrm{Re}\ a_n\gamma_n(t)) \tag{34}$$

Le système $\{\gamma_n(t) - \frac{1}{2}\overline{a}_n)\}_{n\geq 1}$ est orthogonal dans $L^2(\mu_a)$. Cela nous amène à étudier la convergence μ-presque partout de la série orthogonale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\gamma_n(t) - \frac{1}{2}\overline{a}_n\right).$$

Un exemple classique est le produit de Riesz sur $\mathbb{T}$ où la suite dissociée de caractères est une suite $\{\lambda_n\}$ lacunaire au sens de Hadamard, c'est-à-dire $\lambda_{n+1} \geq 3\lambda_n$.

D'après un célèbre théorème de Men'shov-Rademacher, $\sum|\alpha_n|^2\log^2 n < \infty$ est une condition suffisante pour que la séries converge μ_a-presque partout.

Théorème 4.12 **([198, 71])**. — *Soit $S_N(t)$ la somme partielle d'ordre N de la séries ci-dessus. Pour tout $1 < p < \infty$, on a l'inégalité maximale suivante*

$$\left\|\max_{N\geq 1} S_N(t)\right\|_{L^p(\mu_a)} \leq C\frac{p^{3/2}}{p-1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2}.$$

Par conséquent, la série converge μ_a-presque partout si et seulement si $\sum|\alpha_n|^2 < +\infty$.

Démonstration. Pour tout $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{N}}$, introduisons le produit de Riesz

$$\mu_{a,\omega} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \mathrm{Re}\ a_n\gamma_n(t+\omega_n)). \tag{35}$$

Posons $\nu_\omega = \mu_{1,\omega}$ ($a_n = 1$ pour tout n). Considérons ensuite l'opérateur

$$L_\omega g(x) = \int_G g(x+y)\mathrm{d}\nu_\omega(y).$$

C'est un opérateur linéaire positif de norme 1 envoyant $L^p(\mu_a \star \nu_\omega)$ dans $L^p(\mu_a)$. Or

$$\mu_a \star \nu_\omega = \mu_{a/2,\omega}, \quad L_\omega g_{n,\omega}(t) = \frac{1}{2} S_n(t)$$

où

$$g_{n,\omega}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\gamma_k(t+\omega_k) - \frac{1}{4}\overline{a}_k \right).$$

La positivité de L_ω implique

$$\left\| \max_{n\geq 1} S_n(t) \right\|_{L^p(\mu_a)}^p \leq 2^p \int \left(\sup_n |g_{n,\omega}(t)| \right)^p \mathrm{d}\mu_{a/2,\omega}(t).$$

Maintenant rendons (ω_n) aléatoire en supposant que (ω_n) est une suite i.i.d. dont la loi commune des ω_n est la mesure de Haar λ sur G. Puis considérons ensuite la suite de poids

$$P_n(t) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re} a_n\ \gamma_n(t+\omega_n).$$

Alors $\mu_{a/2,\omega} = Q\lambda$. Soit $\mathcal{Q}$ la mesure associée à $Q\lambda$, définie sur $G \times \Omega$. On a

$$\left\| \max_{n\geq 1} S_n(t) \right\|_{L^p(\mu_a)}^p \leq 2^p \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\sup_n |g_{n,\omega}(t)| \right)^p.$$

Rappelons que les $t+\omega_n$ sont $\mathcal{Q}$-indépendantes. On conclut en appliquant l'inégalité de Doob puis l'inégalité de Khintchine. □

Dans [**198**] on a obtenu le résultat pour le groupe $\mathbb{T}$ avec $p = 2$ en utilisant une méthode combinatoire.

5. Dimensions des mesures

L'étude du comportement local d'une mesure consiste à calculer les dimensions et effectuer l'analyse multifractale de cette mesure. Dans cette section nous nous concentrons sur les dimensions de mesures. Nous commençons par rappeler les notions de mesures et dimension de Hausdorff d'un ensemble sur un espace métrique. Nous établissons ensuite un résultat fondamental de la théorie, le théorème de Frostman dans le cas des espaces euclidiens, dont la géralisation au cas d'un espace polonais a été obtenue indépendamment par Howroyd [**121**] et Kaufman [**142**]. Nous choisissons de présenter la méthode de Kaufman, qui s'inspire de la décomposition de Kahane [**133**], décomposition d'une mesure suivant un noyau potentiel. Puis, nous introduisons et illustrons les notions de dimensions supérieure et inférieure d'une mesure au sens de Hausdorff. Nous considérons en particulier le cas de certains produits de Riesz, des mesures de Mandelbrot, et des mesures auto-similaires. Nous ne traiterons pas des dimensions de packing d'une mesure et renvoyons le lecteur à [**215, 114**].

5.1. Mesures et dimension de Hausdorff. — Nous présentons rapidement les mesures et la dimension de Hausdorff sur un espace métrique.

5.1.1. Définitions. — Soit (X, d) un espace métrique. Si U est un sous-ensemble de X, $\operatorname{diam} U$ en désigne le diamètre de U. Si $E \subset \bigcup_i U_i$ et $\operatorname{diam} U_i \leq \delta$, on dit que $\{U_i\}$ est un δ-recouvrement de E.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante continue en $x = 0$ et telle que $\varphi(0) = 0$. Soit E un sous-ensemble arbitraire de X. Pour $\delta > 0$, définissons

$$\mathcal{H}^\varphi_\delta(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\operatorname{diam} U_i)$$

où l'inf est pris sur tous les δ-recouvrement $\{U_i\}$ de E, et

$$\mathcal{H}^\varphi(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\varphi_\delta(E).$$

Si $\varphi(t) = t^\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$, $\mathcal{H}^\varphi(E)$ s'appelle *mesure de Hausdorff α-dimensionnelle* et on écrit $\mathcal{H}^\varphi(E) = \mathcal{H}^\alpha(E)$. Nous définissons la *dimension de Hausdorff* de E, notée $\dim_H(E)$ ou simplement $\dim E$, par

$$\dim E = \inf\{\alpha > 0 : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \sup\{\alpha > 0 : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}.$$

$\mathcal{H}^\varphi$ est une mesure extérieure : c'est une application $\mu(\cdot) = \mathcal{H}^\varphi(\cdot) : 2^X \to [0, +\infty]$ ayant les propriétés suivantes

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B \subset X$;

(iii) (σ-sous-additivité) Pour toute $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset 2^X$ on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Comme conséquence, la dimension de Hausdorff a les propriétés suivantes :

(1) $\dim \emptyset = 0$.

(2) Si $E \subset F$, alors $\dim E \leq \dim F$.

(3) Pour une suite $\{E_i\} \subset 2^X$ on a

$$\dim(\bigcup E_i) = \sup_i \dim E_i.$$

Soit μ une mesure extérieure sur X. Un sous-ensemble $M \subset X$ est dit μ-mesurable si pour tout $S \subset X$ on a

$$\mu(S) = \mu(S \cap M) + \mu(S \setminus M).$$

La famille $\mathcal{M}_\mu \subset 2^X$ constituée de tous les ensembles μ-mesurables est une tribu et la restriction de μ à $\mathcal{M}_\mu$ est une mesure. Si tout ensemble borélien est μ-mesurable , on dit que μ est une mesure de Borel. Une mesure extérieure de Borel μ est dite *Borel régulière* (extérieurement) si pout tout $A \subset X$ il existe un borélien $B \supset A$ tel que $\mu(B) = \mu(A)$. La mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^\varphi$ est une mesure de Borel régulière.

La preuve de ce fait peut se baser sur le critère suivant dû à Carathéodory : pour qu'une mesure extérieure μ soit borélienne il suffit que

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) \tag{36}$$

pour tous $A \subset X, B \subset X$ tels que $\mathrm{d}(A, B) > 0$, où $\mathrm{d}(A, B)$ est la distance entre A et B.

La propriété de régularité interne de $\mathcal{H}^\varphi$ est due à R. O. Davies ([**51**]) : Soit (X, d) un expace métrique, complet et séparable (dit polonais). Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ lors $t \to 0$. Si $A \subset X$ est un ensemble analytique tel que $\mathcal{H}^\varphi(A) > 0$, alors il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mathcal{H}^\varphi(K) > 0$. La condition $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ peut être supprimée si X est σ-compact.

Rappelons qu'un ensemble analytique dans un espace polonais X est par définition l'image continue d'un espace polonais. Un tel ensemble peut être construit à l'aide du schéma de Souslin : à toute suite finie d'entiers naturels $(n_1, \cdots, n_k)$ on associe un ensemble fermé $F_{n_1,\cdots,n_k}$ de X. Alors

$$\bigcup_{(n_1,n_2,\cdots)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_1,\cdots,n_k}$$

est un ensemble analytique, et tout ensemble analytique dans X est de cette forme. Voir [**55**].

La régularité interne de la mesure de Hausdorff implique que pour tout ensemble analytique $A \subset X$ on a

$$\dim A = \sup\{\dim K : K \subset X, \text{ compact}\}.$$

5.1.2. Théorème de Billingsley. — Le théorème de Billingsley fournit une méthode pratique pour calculer la dimension de Hausdorff. Il s'agit d'une version faible du théorème de Frostman qui sera prouvé plus tard. La preuve du théorème de Billingsley utilise aussi le lemme de recouvrement de Vitali ([**54**]) :

soit X un espace métrique compact et S un sous-ensemble de X. Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille de sous-ensembles fermés de X tels que pour tout $s \in S$ il existe un élément $F \in \mathcal{F}$ contenant s de diamètre $\delta(F)$ arbitrairement petit. Alors il existe une sous-famille dénombrable $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ d'ensembles disjoints tels que

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{3\delta}$$

où F^ϵ désigne le ϵ-voisinage de F défini par $\{x \in X : \mathrm{d}(x, F) \leq \epsilon\}$.

Le lemme de Vitali et le théorème de Davies nous permettent d'obtenir le théorème de Billingsley suivant.

***Théorème 5.1* (voir [170]).** — *Soit X un métrique polonais ou σ-compact. Soit $E \subset X$ un ensemble borélien. Alors*

(a) $\dim E \geq \alpha$ *s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ telle que $\mu(E) > 0$ et*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq \alpha, \qquad \forall x \in E.$$

(b) $\dim E \leq \alpha$ *s'il existe une mesure non-nulle $\mu \in M^+(X)$ telle que*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \alpha, \qquad \forall x \in E.$$

5.2. Théorie du potentiel et décomposition de Kahane. —

5.2.1. Potentiel et capacité. — La dimension de Hausdorff peut être calculée autrement en utilisant la théorie du potentiel. Pour les espaces euclidiens, c'est le théorème de Frostman. La généralisation aux espaces polonais est due à Howroyd et Kaufman. Nous présentons d'abord la décomposition de Kahane d'une mesure selon un noyau potentiel, qui est le point de départ de la méthode de Kaufman. Une autre clef de la méthode de Kaufman est un théorème de min-max, qui est fortement lié au célèbre théorème du min-max de von Neumann.

L'ensemble des mesures de Radon positives (i.e., finies sur les compacts) bornées définies sur (X, d) est noté $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}_1^+(X)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$. Le *potentiel d'ordre* α $(0 < \alpha < \infty)$ de μ est défini par

$$U_\alpha^\mu(x) = \int_X \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{(\mathrm{d}(x,y))^\alpha} \quad (x \in X).$$

et son *énergie d'ordre* α par

$$I_\alpha^\mu = \int_X U_\alpha^\mu(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_X \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{(\mathrm{d}(x,y))^\alpha}.$$

Si K une partie compacte de X, sa *capacité d'ordre* α de K est définie par

$$\mathrm{Cap}_\alpha K = \left(\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(K)} I_\alpha^\mu\right)^{-1}.$$

En général, la capacité d'ordre α d'un borélien E se définit comme

$$\mathrm{Cap}_\alpha E = \sup\{\mathrm{Cap}_\alpha K : K \text{ compact contenu dans } E\}.$$

5.2.2. Décomposition de Kahane. — Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ est dite *α-régulière* si μ s'écrit comme $\mu = \Sigma_{n=1}^\infty \mu_n$ (série convergente pour la norme de variation totale) où chaque μ_n est d'α-énergie finie. Une mesure μ est dite *α-singulière* si elle est portée par un borélien d'α-capacité nulle. Nous désignons par $\mathcal{R}_\alpha$ (resp. $\mathcal{S}_\alpha$) l'ensemble de mesures α-régulières (resp. α-singulières). Voici la décomposition de Kahane.

***Théorème 5.2* ([133]).** — *Toute mesure à support compact $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\mu = \mu_r + \mu_s$, où μ_r est α-régulière et et μ_s α-singulière.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour toute mesure μ de support S_μ on a

$$\sup_{z\in X} U_\alpha^\mu(z) \le 2^\alpha \sup_{x\in S_\mu} U_\alpha^\mu(x).$$

(ce fait est un principe du maximum). En effet, soit $z \in X \setminus S_\mu$. Il existe un point $x \in S_\mu$ tel que $\mathrm{d}(z,x) = \mathrm{d}(z, S_\mu) > 0$. Alors

$$\mathrm{d}(x,y) \le \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y) \le 2\mathrm{d}(z,y) \qquad (\forall y \in S_\mu),$$

d'où

$$U_\alpha^\mu(z) = \int_{S_\mu} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mathrm{d}(z,y)^\alpha} \le 2^\alpha \int_{S_\mu} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mathrm{d}(x,y)^\alpha}.$$

Unicité. Supposons que $\mu = \mu_r + \mu_s = \mu_r' + \mu_s'$ et $\mu_s' - \mu_s \neq 0$. Alors il existe un compact K tel que $\mathrm{Cap}_\alpha(K) = 0$ et $(\mu_s' - \mu_s)(K) \neq 0$. Par conséquent, ou bien $\mu_r(K) \neq 0$ ou bien $\mu_r'(K) \neq 0$. Disons $\mu_r(K) > 0$. Comme μ_r est une somme de mesures de α-énergie finie, on en déduit $\mathrm{Cap}_\alpha(K) > 0$.

Existence. Introduisons

$$S = S(\mu,\alpha) = \{x \in X : U_\alpha^\mu(x) = \infty\}.$$

On peut choisir $\mu_s = \mu \mathbf{1}_S$ et $\mu_r = \mu \mathbf{1}_{S^c}$. En effet, μ_r est α-régulière car

$$\mu_r = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \mathbf{1}_{A_n}, \quad A_n = \{x \in S^c : n-1 \leq U_\alpha^\mu(x) < n\}.$$

Pour montrer que μ_s est α-singulière, il nous suffit de montrer que $\mathrm{Cap}_\alpha(S) = 0$. Sinon, il existe un compact $F \subset S$ tel que $\mathrm{Cap}_\alpha(F) > 0$. Autrement dit il existe une mesure $\tau \in \mathcal{M}^+(F)$ telle que $0 < I_\alpha^\tau < \infty$. Prenons un compact $F_0 \subset F$ tel que $\tau(F_0) > 0$ et $\sup_{x \in F_0} U_\alpha^\tau(x) < \infty$, et considérons la mesure $\tau_0 = \tau \mathbf{1}_{F_0}$. En vertu du principe du maximum, nous avons

$$\sup_{x \in X} U_\alpha^{\tau_0}(x) < \infty.$$

Alors

$$\infty = \int U_\alpha^\mu(x) \mathrm{d}\tau_0(x) = \int U_\alpha^{\tau_0}(x) \mathrm{d}\mu(x) \leq \sup_{x \in X} U_\alpha^{\tau_0}(x) < \infty.$$

□

Dans la preuve on a vu que l'ensemble de singularité $S(\mu, \alpha)$ est d'α-capacité nulle. Kaufman a observé que $\dim S(\mu, \alpha) \leq \alpha$, ce que montre le résultat suivant.

Théorème 5.3. — *Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathcal{H}^{\alpha+\epsilon}(S(\mu, \alpha)) = 0$.*

Démonstration. On commence par les estimations suivantes : pour une mesure de probabilité μ on a

$$\sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^\alpha} \leq U_\alpha^\mu(x) \leq \frac{2^{\alpha+\epsilon}}{2^\epsilon - 1} \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\alpha+\epsilon}} + 1$$

On peut supposer que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$. La première inégalité se déduit immédiatement de

$$U_\alpha^\mu(x) \geq \int_{B(x,r)} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mathrm{d}(x,y)^\alpha} \geq \frac{\mu(B(x,r)}{r^\alpha}.$$

Montrons la seconde en intégrant sur des anneaux. D'abord on a

$$U_\alpha^\mu(x) \quad \leq \quad 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{2^{-(n+1)} < \mathrm{d}(x,y) \leq 2^{-n}\}} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mathrm{d}(x,y)^\alpha}.$$

Le terme général dans la somme est majoré par $2^{(n+1)\alpha} \mu(B(x, 2^{-n})$. Alors la somme est majorée par

$$2^\alpha \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\alpha+\epsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\epsilon},$$

ce qui donne la majoration.

Prenons $\Delta > 0$ qui tendra vers l'infini. Supposons $x \in S(\mu, \alpha)$. D'après les estimations précédentes, il existe une suite $r_n = r_n(x)$ tendant vers 0 telle que

$$\mu(B(x, r_n)) \geq \Delta r_n^{\alpha+\epsilon}.$$

Alors, d'après le lemma de Vitali, pour tout $\delta > 0$, on peut extraire des boules vérifiant l'inégalité ci-dessus une suite de boules disjointes $B(x_k, r_{n_k})$ telles que $3r_{n_k} \leq \delta$ et

$$S(\mu, \alpha) \subset \bigcup_k B(x_k, 3r_{n_k}).$$

D'autre part

$$\sum_k (3r_{n_k})^{\alpha+\epsilon} \leq \frac{3^{\alpha+\epsilon}}{\Delta} \sum_k \mu(B(x_k, r_{n_k}) \leq \frac{3^{\alpha+\epsilon}}{\Delta}.$$

On en déduit que $\mathcal{H}^{\alpha+\epsilon}(S(\mu, \alpha)) \leq \frac{3^{\alpha+\epsilon}}{\Delta}$, qui tend vers zero lorsque $\Delta \to \infty$.
□

5.3. Min-max. —

5.3.1. Théorème de Min-Max. —

Théorème 5.4 **([142])**. — *Soit F un espace compact et $\mathcal{K}$ un ensemble de fonctions semi-continues inférieurement définies sur F. Supposons que*

$$a = \sup_{f \in \mathcal{K}} \inf_{x \in F} f(x) < \infty.$$

Alors il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur F telle que

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} \int f \, d\mu \leq a.$$

Démonstration. Supposons pour l'instant que les fonctions dans $\mathcal{K}$ sont toutes continues. On peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$ et que $\mathcal{K}$ contients l'ensemble $C^-(F)$ des fonctions continues négatives. Sinon, on peut remplacer $\mathcal{K}$ par l'enveloppe convexe de $(\mathcal{K} - a) \cup C^-(F)$.

Il est clair que $\{1\} \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset$. Par le théorème de séparation de Banach-Steinhauss, il existe une mesure non-nulle μ qui sépare $\{1\}$ et $\overline{\mathcal{K}}$. Alors

$$\mu(f) \leq \mu(1) \qquad (\forall f \in \mathcal{K}).$$

On constate que μ est positive, car pour toute $g \in C^-(F) \subset \mathcal{K}$ et tout nombre positif Λ on a

$$\mu(g) = \frac{\mu(\Lambda g)}{\Lambda} \leq \frac{\mu(1)}{\Lambda} \to 0 \qquad (\Lambda \to \infty).$$

Le même argument montre aussi que $\mu(f) \leq 0$ pour tout $f \in \mathcal{K}$. Pour obtenir une mesure de probabilité, il suffit de normaliser μ.

Revenons au cas où K contient des fonctions semi-continues inférieurement. A la place de $\mathcal{K}$, on considère

$$\tilde{\mathcal{K}} = \{h \in C(F) : \text{il existe } f \in \mathcal{K} \text{ telle que } h \leq f\}.$$

En appliquant ce que l'on a démontré à $\tilde{\mathcal{K}}$ on obtient une mesure de probabilité μ telle que

$$\mu(h) \leq a \qquad (\forall h \in \tilde{\mathcal{K}}).$$

Soit $f \in \mathcal{K}$. Il existe une suite $h_n \in \tilde{\mathcal{K}}$ telles que $h_n \uparrow f$. Alors

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(h_n) \leq a.$$

□

5.3.2. Théorème de min-max pour l'énergie mutuelle. — Considérons l'énergie mutuelle

$$I(\mu,\nu) = \int\int \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)}{\mathrm{d}(x,y)^\alpha}.$$

Le théorème min-max suivant est une conséquence du théorème précédent.

Théorème 5.5. — *Soit X un espace métrique compact. On a*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \min_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu) = \min_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu).$$

Démonstration. Il est évident que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu) \leq \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu).$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on remarque d'abord que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \inf_{y\in X} U^\mu(y) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu)$$

$$\inf_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \sup_{x\in X} U^\mu(x) = \inf_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu,\nu)$$

Pour voir ces égalités, il suffit d'observer les relations

$$U^\mu(y) = I(\mu,\delta_y),$$

$$\inf_{y\in X} U^\mu(y) \leq I(\mu,\nu) \leq \sup_{x\in X} U^\mu(x).$$

Il nous reste donc à démontrer

$$\inf_{\nu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \sup_{x\in X} U^\mu(x) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} \inf_{y\in X} U^\mu(y).$$

Cela se fait en appliquant le théorème 5.4 à

$$\mathcal{K} = \{U^\mu : \mu \in \mathcal{M}_1^+(X)\}.$$

Pour μ fixée, $I(\mu, \cdot)$ est semi-continue inférieurement et il en est de même de $\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(X)} I(\mu, \cdot)$. C'est pourquoi les deux minima sont atteints. □

5.4. Théorème de Frostman. —

5.4.1. Lemme de Kaufman. —

***Théorème 5.6* (Lemme de Kaufman).** — *Soit K un compact dans X. Si $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une mesure borélienne strictement positive et finie concentrée sur K telle que*

$$\mu(B(x, r)) \le r^{\alpha-\epsilon}$$

pour tout $x \in K$ et tout $r > 0$.

Remarque 5.1. — *Dans le cas où X est un espace euclidien, on peut même construire μ de sorte que $\mu(B(x, r)) \le r^\alpha$ pour tout $x \in K$ et tout $r > 0$. C'est le théorème de Frostman ([**170**], Theorem 8.8).*

Démonstration. On peut supposer que $K = X$ et que X est compact. Comme $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$, on a $K \ne S(\mu, \alpha - \epsilon)$ pour toute $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$. Autrement dit,

$$\inf_{x\in K} U^\mu_{\alpha-\epsilon}(x) < \infty \qquad (\forall \mu \in \mathcal{M}_1^+(K)). \tag{37}$$

Nous constatons que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1^+(K)} \inf_{x\in K} U^\mu_{\alpha-\epsilon}(x) < \infty.$$

Sinon, il existerait une suite $\{\mu_n\} \in \mathcal{M}_1^+(K)$ telle que

$$\inf_{x\in K} U^{\mu_n}_{\alpha-\epsilon}(x) \ge 2^n.$$

Pour $\nu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\mu_n$, on aurait

$$U^\nu_{\alpha-\epsilon}(x) = \sum_{n=1}^\infty U^{\mu_n}_{\alpha-\epsilon}(x) \ge \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty,$$

ce qui contredit (37).

Selon le théorème 5.5, il existe une mesure de probabilité σ tel que $U^\sigma_{\alpha-\epsilon}(x) \le a$ pour tout $x \in K$, d'où le résultat. □

La *dimension de capacité* d'un ensemble $E \subset X$ est définie par

$$\dim_C E = \inf\{\alpha > 0 : \mathrm{Cap}_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 : \mathrm{Cap}_\alpha(E) > 0\}.$$

5.4.2. Théorème de Frostman. —

***Théorème 5.7* (Kaufman-Frostman).** — *Soit* (X, d) *un espace polonais. Pour tout ensemble analytique* $E \subset X$ *on a*

$$\dim_C E = \dim_H E.$$

Démonstration. L'inégalité $\dim_C E \leq \dim_H E$ est facile. Montrons l'inégalité inverse. Posons $\alpha = \dim_H E$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Cap}_{\alpha-\epsilon} E > 0$ pour $0 < \epsilon < \alpha$.

Comme $\mathcal{H}^{\alpha-\epsilon/3}(E) > 0$, d'après le théorème de Davies, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\mathcal{H}^{\alpha-\epsilon/3}(K) > 0$. Alors le lemme de Kaufman (Theorem 5.6) affirme qu'il existe une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ telle que $\mu(B(x,r)) \leq Cr^{\alpha-\frac{2\epsilon}{3}}$, ce qui implique $\sup_{x\in K} U^\mu_{\alpha-\epsilon}(x) < \infty$. Donc $\mathrm{Cap}_{\alpha-\epsilon}(E) \geq \mathrm{Cap}_{\alpha-\epsilon}(K) > 0$. $\square$

5.5. Dimensions supérieure et inférieure d'une mesure. —

5.5.1. Dimensions d'une mesure. — Soit $\mu \in M^+(X)$ une mesure finie. Nous définissons ses *dimension supérieure* et *dimension inférieure* respectivement par

$$\begin{aligned} \dim^* \mu &= \inf\{\dim F : \mu(F) = \mu(X)\} \\ \dim_* \mu &= \inf\{\dim F : \mu(F) > 0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\dim_* \mu \leq \dim^* \mu$. La dimension supérieure apparaissait dans [**226**]. Les dimensions supérieure et inférieure introduites dans [**67**] sont inspirées par [**133**], et par [**196**] dans lequel ces deux dimensions sont étudiées pour les produits de Riesz.

Afin de calculer les dimensions $\dim_* \mu$ et $\dim^* \mu$ d'une mesure μ, il est naturel d'introduire la *dimension locale inférieure* de μ au point x, qui est définie par

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}. \tag{38}$$

En effet, on a les résultats suivants :

***Théorème 5.8* ([68]).** — *Pour toute mesure* $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ *on a*

$$\dim_* \mu \geq \alpha \iff \underline{D}(\mu, x) \geq \alpha \ \ \mu\text{−}p.p. \tag{39}$$

$$\dim^* \mu \leq \alpha \iff \underline{D}(\mu, x) \leq \alpha \ \ \mu\text{−}p.p.. \tag{40}$$

En d'autres termes, on a les formules

$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha \geq 0 \,:\, \underline{D}(\mu, x) \geq \alpha \;\; \mu\text{–}p.p.\} \tag{41}$$

$$\dim^* \mu = \inf\{\alpha \geq 0 \,:\, \underline{D}(\mu, x) \leq \alpha \;\; \mu\text{–}p.p.\}. \tag{42}$$

Théorème 5.9 **([68])**. — *Quel que soit $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$ *;*

b) $\mu \ll \mathcal{H}^\beta$ *si* $\beta < \alpha$, *et* $\mu \perp \mathcal{H}^\beta$ *si* $\beta > \alpha$;

c) *μ est portée par un borélien de dimension α, alors que la mesure de tout borélien de dimension strictement plus petite que α est nulle.*

Si $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$, on dit que μ est *unidimensionnelle* ou *α-dimensionnelle* si l'on veut être plus précis.

Dans [**68, 72**], les deux théorèmes précédents ont été énoncés et démontrés sur les espaces homogènes sur lesquels, d'après un théorème de Assouad [**3**], le théorème de Frostman est valable. Voir [**215, 114**] pour les résultats similaires concernant les dimensions supérieure et inférieure au sens de packing, qui peuvent être décrites à l'aide de la dimension locale supérieure $\limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$.

On dit qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ est *exactement dimensionnelle* s'il existe D tel que $\lim_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} = D$ μ-presque partout.

5.5.2. Exemples de mesures ergodiques et de leurs dimensions. — Soit X un espace métrique. On dit qu'une transformation $T : X \to X$ préserve la dimension de Hausdorff si $\dim T^{-1}E = \dim E$ pour tout borélien E.

Théorème 5.10. — *Supposons que T préserve la dimension de Hausdorff et que μ est une mesure T-invariante et ergodique. Alors μ est unidimensionnelle.*

Démonstration. Soit $\alpha = \dim_* \mu$. Nous allons montrer que $\dim^* \mu = \alpha$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un borélien E_n tel que $\dim E_n < \alpha + \frac{1}{n}$ mais $\mu(E_n) > 0$. Soit $F_n = \bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}E_n$. Comme μ est ergodique, on a $\mu(F_n) = 1$. Grâce à la σ-stabilité de la dimension de Hausdorff et à l'hypothèse que T préserve la dimension, on a

$$\dim F_n = \sup_n \dim T^{-n}E_n = \dim E_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Prenons $F = \bigcap_{n\geq 1} F_n$ qui est de mesure pleine. On a $\dim \mu \leq \dim F \leq \alpha$ $\square$

Il y a d'autres notions d'ergodicité qui impliquent aussi l'unidimensionalité. G. Brown et W. Moran [**39**] ont défini la D-ergodicité et B. Host et F. Parreau [**120**] la pureté qui la généralise. Ces deux notions sont définies pour les mesures sur un groupe métrisable, localement compact et abélien G.

Soit D un sous-groupe d'un groupe abélien localement compact G et μ une mesure de probabilité borélienne sur G. On dit que μ est D-*ergodique* si $\mu(A) = 0$ or 1 pour tout borélien $A \subset G$ qui est D-*invariant* (i.e. $A + d = A$ pour tout $d \in D$). Ce qui revient à dire que pour tous boréliens E et E' tels que $\mu(E) > 0$ et $\mu(E') > 0$, il existe un $d \in D$ tel que $\mu((E - d) \bigcap E') > 0$. Si, pour tous boréliens E et E' tels que $\mu(E) > 0$ et $\mu(E') > 0$, il existe un $x \in G$ (c'est G mais non D) tel que $\mu((E - x) \bigcap E') > 0$, on dit que μ est *pure*. Une définition équivalente de la pureté est la suivante : si $\mu(E) > 0$, alors μ est portée par une union dénombrable des translatées de E.

On démontre de même le résultat suivant.

Théorème 5.11 **([73])**. — *Toute mesure pure définie sur un groupe métrique, localement compact et abélien est unidimensionnelle.*

Voyons quelques exemples.

Considérons d'abord les produits de Riesz

$$\mu = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + r_n \cos(2\pi m_1 m_2 \cdots m_n t + \varphi_n)) \quad (t \in \mathbb{T} = \mathbb{T}/\mathbb{Z})$$

où $-1 \leq r_n \leq 1$, $0 \leq \varphi_n < 2\pi$, $m_n \geq 3$. Il est connu ([**39**]) que μ est D-ergodique, où D est le sous-groupe de $\mathbb{T}$ engendré par $\{m_1^{-1} m_2^{-1} \cdots m_n^{-1} : n \geq 1\}$. Donc, μ est unidimensionnelle. Pour l'estimation de la dimensions de μ, voir [**196**]. En général, on n'a pas de formule explicite pour $\dim \mu$. Mais il y a des formules explicites dans certains cas particuliers. Par exemple, si $r_n \equiv r$, $m_n \equiv m$ et $\varphi_n \equiv \varphi$, on a

$$\dim \mu = 1 - \frac{1}{\log m} \int_0^1 \log(1 + r \cos(2\pi t + \varphi)) \mathrm{d}\mu.$$

Soit G un groupe métrique, localement compact et abélien. Soit μ_n $(n \geq 1)$ une suite de mesures de probabilité discrètes sur G. Supposons que la convolution infinie

$$\mu = \mu_1 \star \mu_2 \star \cdots \star \mu_n \star \cdots \tag{43}$$

converge faiblement vers une mesure μ. Il est connu ([**39**]) que μ est D-ergodique, où D est le sous-groupe engendré par les supports des μ_n $(n \geq 1)$.

Par conséquent, μ est unidimensionnelle. Sur $\mathbb{R}$, on obtient des mesures de convolutions de Bernoulli en prenant

$$\mu_n = \frac{1}{2}(\delta(0) + \delta(r_n)), \qquad \text{où} \quad r_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty.$$

Le cas particulier où $r_n = r^{-n}$ $(0 < r < 1)$ a été intensivement étudié. Si la suite (r_n) est fortement décroissante et régulière au sens suivant

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} r_j < r_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n}{\log r_{n+1}} = 1,$$

alors μ est portée par un Cantor et

$$\dim \mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{-n \log 2}{\log r_n}.$$

Voir aussi [**49**] pour la relation entre l'unidimensionalité et l'ergodicité.

Si l'on travaille sur Σ_m^+, alors le théorème 5.10 prend la forme plus forte suivante, et vaut en particulier pour les mesures quasi-Bernoulli ergodiques (voir aussi le corollaire 3.1) pour lesquelles il sera complété dans la section 5.5.4 :

Théorème 5.12. — **(Shannon-McMillan-Breiman)** *Si μ est une mesure invariante sur (Σ_m^+, σ), alors la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n} = h(x)$$

existe pour μ-presque tout x. Si de plus μ est ergodique, alors $h(x)$ est presque sûrement égale à une constante h, et si Σ_m^+ est muni de la métrique standard on a donc $\dim_* \mu = \dim^* \mu = h/\log(m)$, et μ est exactement dimensionnelle.

Rappelons que l'entropie de la mesure invariante μ est égale à

$$h_\mu = \int h(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

L'application $\mu \mapsto h_\mu$ est affine et semi-continue supérieurement sur l'ensemble des mesures de probabilités invariantes. De plus, cette fonction des mesures invariantes est liée par une transformée de Legendre à la pression topologique définie sur $C(\Sigma_m^+)$ dans la section 3.3 : pour toute fonction $\phi \in C(\Sigma_m^+)$, on a

$$P(\phi) = \sup\left\{ \int \phi \,\mathrm{d}\mu + h_\mu : \mu \text{ invariante} \right\}. \tag{44}$$

De plus il existe toujours une mesure μ qui réalise ce supremum puisque l'entropie est semi-continue supérieurement. Une telle mesure s'appelle *état d'équilibre* de ϕ. L'égalité (44) s'appelle principe variationnel. On se reportera à [**38**], [**206**], [**222**] ou [**227**] pour plus d'informations sur la notion d'entropie d'une mesure invariante et ce principe variationnel.

Le théorème de Shannon-McMillan-Breiman montre que si μ est invariante mais non ergodique, en général elle ne peut pas être unidimensionnelle. En voici une illustration. Soit μ la mesure obtenue comme moyenne de deux mesures quasi-Bernoulli ergodiques distinctes μ_1 et μ_2 sur Σ_m^+. D'après le théorème ergodique sous-additif de Kingman, pour $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$, $h_{\mu_i/\mu_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu_i([x_{|n}])}{-n}$ existe μ_j-presque partout. Comme μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières, on voit qu'avec μ probabilité $1/2$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu([x_{|n}])}{-n} = \min(h_{\mu_1}, h_{\mu_2/\mu_1})$ et avec μ probabilité $1/2$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu([x_{|n}])}{-n} = \min(h_{\mu_2}, h_{\mu_1/\mu_2})$. En général, ces valeurs sont distinctes.

Si μ est ergodique, le théorème de Shannon-McMillan-Breiman montre que la dimension de μ est égale à son entropie, à l'*exposant de Lyapounov* multiplicatif près $1/\log(m)$. C'est là l'exemple le plus simple d'un résultat plus généralement vrai pour certains systèmes dynamiques hyperboliques (voir par exemple [**226, 191**]).

5.5.3. Dimension des cascades multiplicatives de Mandelbrot sur Σ_m^+. — Revenons sur les cascades multiplicatives de Mandelbrot. Nous notons μ la mesure $Q\lambda_m$ construite au paragraphe 4.3.1 sous l'hypothèse $\varphi'(1^-) > 0$ et supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\varphi(p) > -\infty$. Le théorème 4.9 assure alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}(Y^{1+\varepsilon}) < \infty$.

***Théorème 5.13* ([138], théorème 4)**. — *Supposons $\varphi(p) > -\infty$ pour un certain $p > 1$. Avec probabilité 1, pour μ-presque tout x on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_m(\mu([x|_n]))}{-n} = \varphi'(1).$$

Par conséquent, $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \varphi'(1)$, *et μ est exactement dimensionnelle.*

Démonstration. Ceci se prouve de la façon suivante. D'abord, grâce à (31), on décompose $\log(\mu([x|_n]))$ sous la forme

$$\log(\mu([x|_n])) = \log Q(x|_n) + \log Y(x|_n).$$

Puis on utilise la mesure $\mathcal{Q}$ introduite dans la section 4.2 ainsi que (28) pour avoir que presque sûrement, μ-presque partout, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_m Q([x|_n])}{-n} = \varphi'(1).$$

Ensuite, on observe que pour $\gamma > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\log Y(x|_n) > n\gamma) &= \sum_{w\in\Sigma_n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\log Y(w)\geq n\epsilon\}}\mu([w])) \\ &= b^{-n}\sum_{w\in\Sigma_n} \mathbb{E}(Q(w))\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\log Y(w))>n\gamma\}}Y(w)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\log Y>n\gamma\}}Y).\end{aligned}$$

De même,

$$\mathcal{Q}(\log Y(x|_n) < -n\gamma) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\log Y<-n\gamma\}}Y).$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathcal{Q}(|\log Y(x|_n)| > n\gamma) \leq \gamma^{-1}\,\mathbb{E}(Y|\log Y|) < \infty,$$

et on conclut grâce au lemme de Borel-Cantelli. □

On peut se passer de l'hypothèse qu'il existe un $p > 1$ tel que $\varphi(p) > -\infty$ pour conclure que $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \varphi'(1^-)$. Un résultat similaire existe pour $Q\sigma$ où σ est une mesure de Markov ([**78**]). La méthode de preuve est d'utiliser le principle de décomposition (théorème 4.6) et la caractéristion de l'image et du noyau de l'opérateur $\mathbb{E}\,Q$ dans le cas de la percolation sur un arbre ; c'est le sujet qui sera discuté dans la section 9.1 (voir théorème 9.4).

Nous avons vu à la fin de la section 5.5.2 qu'une mesure quasi-Bernoulli possède une dimension locale presque partout par rapport à une autre. C'est aussi le cas pour deux cascades de Mandelbrot construites simultanément. On considère un couple (W, W') de variables aléatoires strictement positives d'espérance 1et une suite $(W(w))_{w\in\Sigma_m^*}$ de copies de (W, W') indépendantes. On suppose que $\max(\mathbb{E}(W\log W), \mathbb{E}(W'\log W')) < \log(m)$. Alors on obtient sur Σ_+ les limites non dégénérées μ_W et $\mu_{W'}$ des cascades multiplicatives de Mandelbrot associées respectivement à $(W(w))_{w\in\Sigma_m^*}$ et $(W'(w))_{w\in\Sigma_m^*}$, pour lesquelles on a le résultat suivant. On désigne par Y_W et $Y_{W'}$ les masses totales respectives de μ_W et $\mu_{W'}$.

***Théorème 5.14* ([6], theorem 6).** — *Supposons que $\mathbb{E}(W'|\log W|) < \infty$ et qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}(Y_{W'}^p) < \infty$ et $q < 0$ tel que $\mathbb{E}(Y_W^q) < \infty$. Avec probabilité 1, pour $\mu_{W'}$-presque tout x on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_m(\mu([x_{|n}]))}{-n} = 1 - \mathbb{E}(W'\log_m W).$$

La preuve est une adaptation de celle du théorème 5.13.

5.5.4. Lien entre la dimension d'une mesure sur Σ_m^+ et son L^q-spectre. — Soit μ est une mesure borélienne positive non nulle et finie sur Σ_m^+. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction concave et croissante, appelée parfois L^q-spectre :

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{n\to\infty} \tau_{\mu,n}(q), \quad \text{où } \tau_{\mu,n}(q) = -\frac{1}{n}\log_m \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu([w])^q.$$

Cette fonction interviendra dans l'analyse multifractale de μ. Remarquons que la concavité de τ_μ implique

$$\tau'_\mu(q^+) \le \tau'_\mu(q^-) \qquad \forall q \in \mathbb{R}_+.$$

On a le résultat suivant, qui compare $\dim_* \mu$ et $\dim^* \mu$ aux dérivées à gauche et à droite de τ_μ en $q = 1$ (voir [**177, 114**] par exemple. Voir [**72**] pour les mesures de Gibbs). Notons

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n\log m}, \qquad \overline{D}(\mu, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n\log m}.$$

Théorème 5.15. — *Pour μ-presque tout point $x \in \Sigma_m^+$ on a*

$$\tau'_\mu(1^+) \le \underline{D}(\mu, x) \le \overline{D}(\mu, x) \le \tau'_\mu(1^-).$$

Autrement dit, $\tau'_\mu(1^+) \le \dim_* \mu \le \dim^* \mu \le \tau'_\mu(1^-)$. Par conséquent, si $\tau'_\mu(1)$ existe, la mesure μ est unidimensionnelle au sens fort où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n\log m} = \tau'_\mu(1)$$

μ-presque partout.

On a la réciproque suivante, dont les conditions sont satisfaites par les mesures quasi-Bernoulli.

Théorème 5.16 **([114])**. — *Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mu([w\cdot v]) \le C\mu([w])\mu([v]), \quad \forall\ v, w \in \Sigma_m^*. \tag{45}$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$ les ensembles

$$\big\{x \in \mathrm{supp}(\mu) : \underline{D}(\mu, x) \le \tau'_\mu(1^+) + \epsilon\big\}, \quad \big\{x \in \mathrm{supp}(\mu) : \overline{D}(\mu, x) \ge \tau'_\mu(1^-) - \epsilon\big\}$$

sont de μ-mesure strictement positive. Par conséquent, si de plus la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n\log m}$ existe et est égale à une constante μ-presque partout, alors $\tau'_\mu(1)$ existe.

Remarque 5.2. — *L'hypothèse (45) est essentielle. En effet, si la mesure μ est continue, il est établit dans* [**115**] *(Theorem 4.1) qu'il existe une mesure ν équivalente à μ telle que $\tau_\nu(q) = \min(q-1, 0)$ sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration du théorème 5.15. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ soit

$$E_{n,\varepsilon} = \big\{x \in \operatorname{supp}(\mu) : \mu([x|_n]) > m^{-n(\tau_\mu'(1^+)-\varepsilon)}\big\}.$$

Pour montrer que $\underline{D}(\mu, x) \geq \tau'(1^+)$ μ-presque partout, par le lemme de Borel-Cantelli, il nous suffit de montrer que $\sum_{n\geq 1} \mu(E_{n,\varepsilon}) < \infty$.

En appliquant une inégalité de Markov on voit que pour tout $\eta > 0$ on a

$$\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq m^{n\eta(\tau_\mu'(1^+)-\varepsilon)} \int \mu([x|_n])^\eta \, \mathrm{d}\mu(x) = m^{n\eta(\tau_\mu'(1^+)-\varepsilon)} \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu([w])^{1+\eta}.$$

Or, pour tout $\eta > 0$ et pour n assez grand on a

$$\sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu([w])^{1+\eta} \leq m^{n(-\tau_\mu(1+\eta)+\eta^2)}.$$

D'autre part, par définition de $\tau_\mu'(1^+)$, on a

$$-\tau_\mu(1+\eta) \leq -\tau_\mu(1) - \eta\tau_\mu'(1^+) + o(\eta) = -\eta\tau_\mu'(1^+) + o(\eta).$$

Donc, si η est choisi suffisamment petit, pour n assez grand on a

$$\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq m^{-n\eta(\varepsilon-\eta+o(1))} \leq m^{-n\eta\varepsilon/2}.$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 1} \mu(E_{n,\varepsilon}) < \infty$. On procède de la même façon pour montrer que $\overline{D}(\mu, x) \leq \tau_\mu'(1^-)$ μ-presque partout. $\square$

Démonstration du théorème 5.16. Posons

$$F_+ = \big\{x \in \operatorname{supp}(\mu) : \underline{D}(\mu, x) \leq \tau_\mu'(1^+) + \epsilon\big\}$$

$$F_- = \big\{x \in \operatorname{supp}(\mu) : \overline{D}(\mu, x) \geq \tau_\mu'(1^-) - \epsilon\big\}.$$

Nous établissons seulement $\mu(F_+) > 0$. Le cas de F_- se prouve de façon similaire. On peut toujours normaliser μ pour qu'elle soit de probabilité.

Posons $\alpha_0 = \tau_\mu'(1^+)$ et $\alpha = \tau_\mu'(1^+) + \epsilon > \alpha_0$ et définissons

$$F_n = \Big\{x \in \operatorname{supp}(\mu) : \frac{\log(\mu([x|_n]))}{-n\log m} \leq \alpha\Big\}.$$

Comme $F_+ \supset \limsup_{n\to\infty} F_n$, pour que $\mu(F_+) > 0$ il nous suffit de montrer $\limsup_{n\to\infty} \mu(F_n) > 0$, grâce au lemme de Fatou. Nous allons démontrer $\liminf_{n\to\infty} \mu(F_n) > 0$, ce qui est un peu plus que ce qu'on veut.

Remarquons tout d'abord que (45) entraîne pour tout $q > 0$, la suite

$$u_n = C^q \sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu([w])^q$$

est sous-multiplicative. Par conséquent, $u_n^{1/n}$ converge vers sa borne inférieure, et l'on a pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu([w])^q \geq C^{-q} m^{-n\tau_\mu(q)}. \tag{46}$$

La concavité de τ_μ impose que pour $\eta > 0$ on ait $\tau_\mu(1+\eta) \leq \eta\alpha_0$. Donc (46) implique

$$\begin{aligned} C^{-(1+\eta)} m^{-n\eta\alpha_0} &\leq \sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu([w])^{1+\eta} \\ &\leq \sum_{w \in \Sigma_m^n, \mu([w]) < m^{-n\alpha}} \mu([w])^{1+\eta} + \sum_{w \in \Sigma_m^n, \mu([w]) \geq m^{-n\alpha}} \mu([w])^{1+\eta} \\ &\leq (1 - \mu(F_n)) m^{-n\eta\alpha} + \mu(F_n)^{1/2} \Big(\sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu([w])^{1+2\eta} \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$C^{-(1+\eta)} m^{-n\eta\alpha_0} \leq (1 - \mu(F_n)) m^{-n\eta\alpha} + \mu(F_n)^{1/2},$$

puis

$$m^{-\delta\alpha} \mu(F_n) - \mu(F_n)^{1/2} \leq m^{-\delta\alpha} - C^{-2} m^{-\delta\alpha_0}, \tag{47}$$

avec $\delta = n\eta$. Comme $\alpha > \alpha_0$, si δ est fixé suffisamment grand et η égal à δ/n, on en déduit que $c = m^{-\delta\alpha} - C^{-2} m^{-\delta\alpha_0} < 0$ (indépendant de n). Soit $a = m^{-\delta\alpha}$. Observons que les racines de l'équation quadratique $at^2 - t = c$ sont positives. Donc il résulte de (47) qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$

$$\mu(F_n) \geq \gamma.$$

□

5.5.5. Dimension des mesures auto-similaires. — Nous utiliserons les notations et notions introduites dans la section 3.5.1, et considérons l'attracteur auto-similaire K d'un IFS constitué de similitudes contractantes. Le calcul explicite de la dimension de Hausdorff de l'attracteur K en fonction des paramètres du système $\mathbf{S}$ est un problème non résolu de façon générale, de même que celui du calcul des dimensions de Hausdorff des mesures auto-similaire ν définies sur K. Cela dit, on a le résultat récent et remarquable suivant, sans hypothèse supplémentaire sur l'IFS $\mathbf{S}$:

Théorème 5.17. — [**101**] *Soit μ une mesure ergodique sur (Σ_N^+, σ). La mesure $\mu \circ \pi_{\mathbf{S}}^{-1}$ obtenue en projetant naturellement μ sur K est exactement dimensionnelle.*

De plus, on sait [**62**] que K possède toujours la propriété de régularité d'avoir une dimension de Hausdorff égale à sa dimension de Minkowski-Bouligand, définie dans la section 6.2.4 (cette propriété, comme le théorème 5.17, est également valable si les fonctions de l'IFS sont des applications conformes).

Voici des situations dans lesquelles on sait calculer les dimensions.

Lorsque la condition (OSC) est satisfaite, la dimension de Hausdorff de K est l'unique solution de l'équation

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|S_k\|^d = 1 \tag{48}$$

et la dimension de Hausdorff de ν est égale à

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \log p_k}{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \log \|S_k\|}$$

[**122**]. Nous allons donner une preuve de ces résultats.

La condition (OSC) n'est bien sûr pas toujours vérifiée. Elle peut être relaxée en la condition de *type fini* introduite dans [**179**], que nous avons donné en dimension 1 dans la section 3.5.2. Les dimensions s'obtiennent alors comme le logarithme de la plus grande valeur propre d'une matrice positive déterminée à partir de $\mathbf{p}$ et des éléments de $\mathbf{S}$ (voir [**179**] pour plus de détails).

Il existe aussi des résultats de type générique. Par exemple, si $d = 1$ et si l'on écrit $S_k = \rho_k x + b_k$, alors pour presque tout choix de $(b_k)_{0 \le k \le N-1}$ les dimensions de Hausdorff de K et ν sont données par les mêmes formules que dans le cas où la condition (OSC) est satisfaite [**59**]. Il y a aussi des résultats de type générique en dimension supérieure, et dans le cas auto-affine [**60, 213**], mais il ne couvrent pas les constructions les plus simples dans lesquelles la condition (OSC) est satisfaite, comme dans le cas où l'attracteur est une éponge de Sierpinski [**171, 144**] auto-affine (voir aussi [**110, 201**]) ; ces ensembles fractals ont de plus la propriété d'avoir des dimensions de Hausdorff et de boîtes distinctes en général (voir les sections 7.4 et 7.5.3).

Calcul de la dimension de Hausdorff des mesures autosimilaires sous la condition (OSC).

Equipons Σ_N^+ de la distance ultrametrique $d(t, t') = \prod_{k=1}^{|t \wedge t'|} \|S_{i_k}\|$, où $t \wedge t'$ est le plus grand préfixe commun de t et t', et on l'a écrit $i_1 \cdots i_{|t\wedge t'|}$. Si $\mu_{\mathbf{p}}$ désigne la mesure de Bernoulli associé au vecteur de probabilité $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{N-1})$, on voit aisément en appliquant la loi des grands nombres à $\log \mu_{\mathbf{p}}([t_{|n}])$ et $\log(\mathrm{diam}[t_{|n}])$ par rapport à $\mu_{\mathbf{p}}$ que $\mu_{\mathbf{p}}$ est exactement dimensionnelle, de dimension $D_{\mu_{\mathbf{p}}} = (\sum_{k=0}^{N-1} p_k \log p_k)/(\sum_{k=0}^{N-1} p_k \log \|S_k\|)$. Nous allons en déduire que pour $\nu_{\mathbf{p}}$-presque tout x nous avons $\lim_{r\to 0^+} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} = D_{\mu_{\mathbf{p}}}$, et donc $\nu_{\mathbf{p}}$ est exactement dimensionnelle.

Pour tout $x \in K$ et $r \in (0,1)$ soit

$$S(x,r) = \Big\{ u \in \Sigma_N^* : \|S_u\| < r \le \|S_{u_{||u|-1}}\| \text{ et } S_u(K) \cap B(x,r) \neq \emptyset \Big\}.$$

La condition (OSC) impose que $\ell = \sup_{x\in K, 0<r<1} \# S(x,r) < \infty$. Cela implique que $\pi_{\mathbf{S}}^{-1}(B(x,r))$ est recouvert par un nombre uniformément borné par rapport à $x \in K$ et $r \in (0,1)$ de boules de (Σ_N^+, d) de rayon comparable à r. On en déduit aisément que $\pi_{\mathbf{S}}$, qui est lipschitzienne, préserve la dimension de Hausdorff.

Soit E un ensemble de $\mu_{\mathbf{p}}$-mesure pleine tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu_{\mathbf{p}}([t_{|n}])}{\log(\mathrm{diam}[t_{|n}])} = D_{\mathbf{p}}$ pour tout $t \in E$. Alors, on déduit de ce qui précède que pour tout $F \subset \pi_{\mathbf{S}}(E)$ tel que $\nu_{\mathbf{p}}(F) > 0$ on a $\dim F = \pi_{\mathbf{S}}(E) = \dim E = D_{\mu_{\mathbf{p}}}$ et pour tout $x \in \pi_{\mathbf{S}}(E)$ on a $\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} \le \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} \le D_\mu$.

Pour $\alpha \ge 0$ posons

$$F_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha) = \Big\{ x \in K : \liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} \le \alpha \Big\}.$$

Nous allons maintenant utiliser des résultats d'analyse multifractale. Il découle de la proposition 6.1 et de la preuve de la proposition 6.2 que l'on a pour tout $\alpha \in [0, \tau'_{\nu_{\mathbf{p}}}(0^+)]$ on a $\dim F_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha) \le \tau^*_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha)$ (voir aussi la remarque 6.3 pour les notations). Supposons prouvé le fait que le L^q-spectre de $\nu_{\mathbf{p}}$ est tel que pour $q \ge 0$ on a $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(q) \ge \tau(q)$ où $\tau(q)$ est l'unique solution de l'équation

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_k^q \|S_k\|^{-\tau} = 1.$$

On a $D_\mu = \tau'(1)$ et donc $\tau^*(D_\mu) = D_\mu$. De plus, comme $\tau(1) = \tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(1) (= 0)$, on a $\tau'_{\nu_{\mathbf{p}}}(1) = \tau'(1)$, et $\tau^*_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha) \le \tau^*(\alpha) < \tau^*(D_\mu) = D_\mu$ pour tout $\alpha < D_\mu$. Supposons qu'il existe $\alpha < D_\mu$ tel que $\nu_{\mathbf{p}}(F_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha) \cap \pi_{\mathbf{S}}(E)) > 0$. Alors, on aboutit à la contradiction $D_\mu \le \dim F_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha) \le \tau^*_{\nu_{\mathbf{p}}}(\alpha)$. Donc, pour $\nu_{\mathbf{p}}$-presque tout $x \in \pi_{\mathbf{S}}(E)$, c'est à dire $\nu_{\mathbf{p}}$-presque partout, on a $\lim_{r\to 0^+} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} = D_\mu$.

Vérifions que $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(q) \le \tau(q)$ pour $q \ge 0$. Soit $r > 0$ et $(B(x_j, r_j))_j$ un packing de K par des boules centrées sur K et de rayons $r/2 < r_j \le r$. Chaque

$B(x_j, r_j)$ est recouverte par au plus ℓ ensembles de la forme $S_u(K) = \pi_{\mathbf{S}}([u])$ avec $u \in S(x_j, r_j)$. Donc $\nu_{\mathbf{p}}(B(x_j, r_j)) \leq \sum_{u \in S(x_j, r_j)} \mu_{\mathbf{p}}([u])$ et on a pour $q \geq 0$

$$\nu_{\mathbf{p}}(B(x_j, r_j))^q \leq \ell^q \sum_{u \in S(x_j, r_j)} \mu_{\mathbf{p}}([u])^q \leq \ell^{q+1} \sum_{u \in S(x_j, r)} \mu_{\mathbf{p}}([u])^q.$$

Comme les boules $B(x_j, r_j)$ sont disjointes et $r/2 < r_j \leq r$, il existe $c_1 \in \mathbb{N}_+$ ne dépendant que de $\mathbf{S}$ et de d telle que pour chaque u dans le terme de droite $S_u(K)$ rencontre au plus c_1 de ces boules. Par conséquent,

$$\sum_j \nu_{\mathbf{p}}(B(x_j, r_j))^q \leq c_1 \ell^{q+1} \sum_{u \in \Sigma_N^* : \|S_u\| < r \leq \|S_{u_{||u|-1}}} \mu_{\mathbf{p}}([u])^q,$$

et pour $t \in \mathbb{R}$, il existe c_2 ne dépend que de $\mathbf{S}$ et de t telle que

$$\begin{aligned}
\sum_j \nu_{\mathbf{p}}(B(x_j, r_j))^q r_j^t &\leq c_1 c_2 \ell^{q+1} \sum_{u \in \Sigma_N^* : \|S_u\| < r \leq \|S_{u_{||u|-1}}} \mu_{\mathbf{p}}([u])^q \|S_u\|^t \\
&\leq c_1 c_2 \ell^{q+1} \sum_{n=1}^{n_r} \sum_{u \in \Sigma_N^n} \mu_{\mathbf{p}}([u])^q \|S_u\|^t \\
&= c_1 c_2 \ell^{q+1} \sum_{n=1}^{n_r} \Big(\sum_{k=0}^{N-1} p_k^q \|S_k\|^t \Big)^n,
\end{aligned}$$

où $n_r = \log(r)/\max_{0 \leq k \leq N-1} \log \|S_k\|$. Donc, si $t > -\tau(q)$, avec les notations de la section 6.2.4 on a $\sup_{0<r<1} \mathcal{P}^{*q,t}_{\log \nu_{\mathbf{p}}, r}(K) < \infty$. Par conséquent, $\Delta_{\log \nu_{\mathbf{p}}, q}(K) \leq t$. Ainsi, $\Delta_{\log \nu_{\mathbf{p}}, q}(K) \leq -\tau(q)$, donc $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(q) = -\Delta_{\log \nu_{\mathbf{p}}, q}(K) \geq \tau(q)$.

Calcul de la dimension de Hausdorff de K sous la condition (OSC). Il résulte des définitions de la dimension de Minkowski-Bouligand et de la fonction $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}$ (sections 6.2.4 et 6.3) que la dimension de Hausdorff de K, le support de $\nu_{\mathbf{p}}$, est inférieure ou égale à $-\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(0)$, donc à $-\tau(0)$, qui n'est autre que le nombre d défini dans (48). Soit maintenant $\mathbf{p_S}$ le vecteur de probabilité $(\|S_0\|^d, \ldots, \|S_{N-1}\|^d)$. D'après le calcul fait au paragraphe précédent, la dimension de la mesure $\nu_{\mathbf{p_S}}$ est d, donc $\dim K \geq d$.

6. Analyse multifractale

6.1. Introduction. —

6.1.1. Un paradigme de la multifractalité. — Soit une mesure de probabilité μ dont le support est $[0,1]$. On note $I_{n,j}$, pour $0 \le j < 2^n$, les sous-intervalles dyadiques (semi-ouverts à droite) de $[0,1]$ de longueurs 2^{-n}. Celui d'entre eux qui contient x est noté $I_n(x)$. On pose,

$$\tau(q) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log_2 \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu(I_{n,j})^q$$

et

$$E_\alpha = \left\{ x \in [0,1[\mid \lim_{n\to\infty} \frac{-\log \mu\big(I_n(x))\big)}{n \log 2} = \alpha \right\},$$

où q et α sont deux nombres réels.

L'analyse multifractale est venue de la préoccupation suivante : relier la dimension de Hausdorff $\dim E_\alpha$ et la fonction τ. La relation attendue est

$$\dim E_{\tau'(q)} = \tau^*\big(\tau'(q)\big),$$

où τ^* désigne la transformée de Legendre de τ.

Il en est bien ainsi lorsque μ est une mesure binomiale, comme on le verra ci-dessous.

6.1.2. Un cadre plus général. — L'analyse précédente [**40**] fait jouer un rôle particulier aux "boîtes dyadiques". Cela a plusieurs inconvénients. D'abord, elle n'est pas invariante par translations. Ensuite, les exposants de Hölder que l'on considère ne sont pas les exposants usuels. Pour ces raisons, L. Olsen [**185**] a introduit le formalisme un peu plus lourd qui sera décrit ci-dessous.

En outre, il n'y a aucune raison de limiter cette analyse aux mesures, comme cela a été observé assez tôt par S. Jaffard d'une part [**124, 126**] (voir aussi section 8.2.2) et par J. Lévy Véhel et R. Vojak d'autre part [**158**].

Voici, brièvement décrit les points communs à ces diverses théories. On se donne, disons en dimension 1, une fonction positive μ définie sur les intervalles et l'on considère les ensembles de niveau de l'exposant de Hölder local

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{r\searrow 0} \frac{\log \mu([x-r,x+r])}{\log r} = \alpha \right\}.$$

L'analyse multifractale vise à déterminer la dimension de Hausdorff des ensembles E_α, notamment en l'exprimant comme la valeur en α d'une transformée de Legendre.

L'analyse d'une fonction f utilise la fonction μ suivante

$$\mu([x-r,x+r]) = \sup_{|x-t|\le r} \inf_{P:\,\text{polynôme}} |f(t)-P(t)|\,,$$

mais on pourrait penser aussi à l'oscillation moyenne

$$\int_{x-r}^{x+r} \left| f(t) - \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(u)\,\mathrm{d}u \right| \mathrm{d}t\,.$$

Enfin, il peut être utile d'analyser des fonctions vectorielles. C'est ce que nous allons décrire. Une version plus complète se trouve dans [**200**]. La plupart des démonstrations reprennent celles de [**31**].

6.2. Mesures et dimensions multifractales. —

6.2.1. Notations et conventions. — $(\mathbb{X}, \mathrm{d})$ désigne un espace métrique. On pose

$$\mathsf{B}\,(x,r) = \{y \in \mathbb{X} \mid \mathsf{d}\,(x,y) \leq r\}\,.$$

Par commodité, nous donnerons une acception plus restrictive qu'habituellement aux termes recouvrement et packing. Si A est une partie de $\mathbb{X}$ et δ un nombre positif, une collection $\{\mathsf{B}\,(x_j,r_j)\}$ de boules telles que $x_j \in A$ et $r_j \leq \delta$, est un δ-*recouvrement* de A si $A \subset \bigcup \mathsf{B}\,(x_j,r_j)$, un δ-*packing* de A si elles sont deux à deux disjointes.

On utilisera la convention suivante : si $\{\mathsf{B}_j\}$ est un ensemble de boules, x_j et r_j désigneront les centre et rayon de B_j.

On suppose, tout au long de ce chapitre, que l'espace $\mathbb{X}$ satisfait la *propriété de recouvrement de Besicovitch* : il existe un nombre entier θ tel que de toute collection $\big\{\mathsf{B}\,(x_j,r_j)\big\}_{j\in J}$ on puisse extraire θ familles de boules deux à deux disjointes $\big\{\{\mathsf{B}_{i,j}\}_j \in J_i\big\}_{1\leq i\leq\theta}$ telles que l'on ait

$$\{x_j \mid j \in J\} \subset \bigcup_{1\leq i\leq\theta} \bigcup_{j\in J_i} \mathsf{B}_{i,j}\,.$$

$\mathbb{E}$ est un espace de Banach réel séparable, dont le dual est noté $\mathbb{E}'$ et la forme de dualité $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère une fonction $\varkappa$ définie sur l'ensemble $\mathbb{X}\times]0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{E}'$. En d'autres termes, c'est une fonction définie sur l'ensemble des boules de $\mathbb{X}$. On écrira aussi $\varkappa(x,r) = \varkappa\big(\mathsf{B}\,(x,r)\big)$. C'est la fonction dont on veut faire l'analyse multifractale.

6.2.2. Mesures de Hausdorff. — Nous appellerons *jauge* une fonction ϕ, continue et monotone, de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. L'ordre de ϕ est $\operatorname{ord}\phi = \varliminf_{r\searrow 0} \dfrac{\log\phi(r)}{\log r}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{r\searrow 0} r^{\varepsilon-\operatorname{ord}\phi}\,\phi(r) = 0$.

Si ϕ est une jauge, pour $A \subset \mathbb{X}$, $q \in \mathbb{E}$ et $\delta \in]0,1[$, on pose

$$\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}(A) = \inf \sum_j \phi(r_j) \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_j,r_j)\rangle}, \tag{49}$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des collections $\{(x_j,r_j)\}$ telles que les boules $\mathsf{B}\,(x_j,r_j)$ forment un δ-recouvrement de A.

Ensuite, on pose

$$\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa}(A) = \lim_{\delta\searrow 0} \phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}(A). \tag{50}$$

Comme fonction de A, $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa}(A)$ est sous σ-additive, mais elle n'est pas croissante, car on a utilisé des recouvrements centrés. C'est pourquoi, on pose

$$\phi\text{–}\mathcal{H}^q_{\varkappa}(A) = \sup_{B\subset A} \phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa}(B)\,. \tag{51}$$

Comme fonction de A, $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_{\varkappa}(A)$ est une mesure extérieure par rapport à laquelle les boréliens de $\mathbb{X}$ sont mesurables.

Lorsque $\phi(u) = u^t$, les fonctions $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}$, $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa}$ et $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_{\varkappa}$ seront notées respectivement $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa,\delta}$, $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa}$ et $\mathcal{H}^{q,t}_{\varkappa}$.

On pose

$$\dim_{\varkappa,q} A = \inf\left\{t \mid \mathcal{H}^{q,t}_{\varkappa}(A) = 0\right\} = \sup\left\{t \mid \mathcal{H}^{q,t}_{\varkappa}(A) = \infty\right\}\,. \tag{52}$$

Lorsque $\varkappa = 0$, les quantités $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa,\delta}$, $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa}$, $\mathcal{H}^{q,t}_{\varkappa}$ et $\dim_{\varkappa,q}$ ne dépendent pas de q ; elles seront notées respectivement $\overline{\mathcal{H}}^t_{\delta}$, $\overline{\mathcal{H}}^t$, $\mathcal{H}^t$ et dim. $\dim A$ est la *dimension de Hausdorff* de l'ensemble A.

Les mesures ci-dessus sont rarement calculables explicitement. Heureusement, ce qui importe le plus souvent, et notamment ici, c'est de décider si une mesure de Hausdorff est nulle ou non. Voici un lemme très simple, mais utile.

Lemme 6.1. — *S'il existe une mesure de Borel μ_q, positive et non nulle, et une constante C telles que, pour toute boule $\mathsf{B}\,(x,r)$, on ait*

$$\mu_q\big(\mathsf{B}\,(x,r)\big) \le C\,\phi(r)\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x,r)\rangle}, \tag{53}$$

alors $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_{\varkappa}(\mathbb{X}) > 0$.

Remarque 6.1. — *La même conclusion est vraie si l'on suppose seulement que pour μ_q-presque tout x, il existe $r_x > 0$ tel que (53) ait lieu pour $0 < r \leq r_x$.*

Démonstration. En effet, si $\{\mathsf{B}_j\}$ est un recouvrement d'une partie A de $\mathbb{X}$, on a

$$C^{-1}\mu(A) \leq \sum C^{-1}\mu(\mathsf{B}_j) \leq \sum \phi(r_j)\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle}.$$

□

Ce lemme est souvent improprement appelé lemme de Frostman. Le vrai lemme de Frostman, dont la démonstration n'est pas immédiate, est la réciproque du précédent dans le cas où $\varkappa = 0$ et $\phi(t) = t^\alpha$. C'est en référence à ce résultat que nous nommerons *mesure de Frostman* une mesure satisfaisant les conditions du lemme précédent.

6.2.3. Mesures de packing. — Pour $A \subset \mathbb{X}$, $q \in \mathbb{E}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0,1[$, on pose

$$\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa,\delta}(A) = \sup \sum_j r_j^t \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle}, \tag{54}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des collections $\{(x_j, r_j)\}$ telles que les boules $\mathsf{B}\,(x_j, r_j)$ forment un δ-packing de A.

Ensuite, on pose

$$\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa}(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa,\delta}(A) \tag{55}$$

Cette fonction de A est évidemment monotone, mais elle n'est pas sous-additive, c'est pourquoi on pose

$$\mathcal{P}^q_\varkappa(A) = \inf \left\{ \sum \overline{\mathcal{P}}^q_\varkappa(A_n) \mid A \subset \bigcup A_n \right\}. \tag{56}$$

Comme fonction de A, $\mathcal{P}^{q,t}_\varkappa(A)$ est une mesure extérieure par rapport à laquelle les boréliens de $\mathbb{X}$ sont mesurables.

Comme précédemment, il y a une valeur de coupure pour t : on pose

$$\mathrm{Dim}_{\varkappa,q} A = \inf \left\{ t \mid \mathcal{P}^{q,t}_\varkappa(A) = 0 \right\} = \sup \left\{ t \mid \mathcal{P}^{q,t}_\varkappa(A) = +\infty \right\}. \tag{57}$$

Lorsque $\varkappa = 0$, les quantités $\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa,\delta}$, $\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa}$, $\mathcal{P}^{q,t}_\varkappa$ et $\mathrm{Dim}_{\varkappa,q}$ ne dépendent pas de q ; elles seront notées respectivement $\overline{\mathcal{P}}^t_\delta$, $\overline{\mathcal{P}}^t$, $\mathcal{P}^t$ et Dim. $\mathrm{Dim}\,A$ est la *dimension de packing* ou *dimension de Tricot* [**219**] de l'ensemble A.

Lemme 6.2. — *On a $\mathcal{H}^{q,t}_\varkappa \leq \theta\,\mathcal{P}^{q,t}_\varkappa$ et, par conséquent,* $\dim_{\varkappa,q} \leq \mathrm{Dim}_{\varkappa,q}$.

Démonstration. La propriété de recouvrement de Besicovitch sera utile. Soit $A \subset \mathbb{X}$. Extrayons de la famille $\{\mathsf{B}\,(x,r)\}_{x\in A}$ des boules $\big\{\{\mathsf{B}_{i,j}\}_{j\geq 0}\big\}_{1\leq i\leq \theta}$ qui recouvrent A et telles que chaque famille $\{\mathsf{B}_{i,j}\}_{j\geq 0}$ soit un packing. On a

$$\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa,r}(A) \leq \sum_{i,j} r^t\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(\mathsf{B}_{i,j})\rangle} \leq \theta\,\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa,r}(A)\,,$$

d'où $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa}(A) \leq \theta\,\overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa}(A)$, puis $\overline{\mathcal{H}}^{q,t}_{\varkappa}(A) \leq \theta\,\mathcal{P}^{q,t}_{\varkappa}(A)$ et enfin $\mathcal{H}^{q,t}_{\varkappa}(A) \leq \theta\,\mathcal{P}^{q,t}_{\varkappa}(A)$. □

6.2.4. La dimension de Minkowski-Bouligand. — Une autre fonction séparatrice est utile : si A est une partie bornée de $\mathbb{X}$, on pose

$$\Delta_{\varkappa,q}(A) = \inf\left\{t\in\mathbb{R} \mid \overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa}(A) = 0\right\}. \tag{58}$$

Pour faciliter le calcul de cette quantité, il est commode de définir

$$\mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa,\delta}(A) = \sup\sum_j r_j^t \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle}, \tag{59}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des collections $\{(x_j,r_j)\}$ telles que $\delta/2 < r_j \leq \delta$ et telles que les boules $\mathsf{B}\,(x_j,r_j)$ forment un packing centré de A, et

$$\mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa} = \varlimsup_{r\searrow 0} \mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa,r}. \tag{60}$$

Lemme 6.3. — *On a* $\Delta_{\varkappa,q}(A) = \inf\left\{t\in\mathbb{R} \mid \mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa}(A) = 0\right\}$.

Démonstration. Posons provisoirement $\Delta^*_{\varkappa,q}(A) = \inf\left\{t\in\mathbb{R} \mid \mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa}(A) = 0\right\}$. On a évidemment $\mathcal{P}^{*q,t}_{\varkappa} \leq \overline{\mathcal{P}}^{q,t}_{\varkappa}$ d'où $\Delta^*_{\varkappa,q} \leq \Delta_{\varkappa,q}$. Si $\Delta_{\varkappa,q}(A) = -\infty$, il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, prenons un nombre t strictement inférieur à $\Delta_{\varkappa.q}(A)$. Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe un δ-packing de A tel que

$$\sum r_j^t\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} \geq 1.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que l'on ait

$$\sum_{j:\,\delta/2<2^k r_j\leq\delta} r_j^t\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} \geq \frac{2^{-k\varepsilon}}{1-2^{-\varepsilon}}.$$

On a alors

$$\sum_{j:\,\delta/2<2^k r_j\leq\delta} r_j^{t-\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} \geq 2^{k\varepsilon}\delta^{-\varepsilon} \sum_{j:\,\delta/2<2^k r_j\leq\delta} r_j^t\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} \geq \frac{\delta^{-\varepsilon}}{1-2^{-\varepsilon}}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{P}_{\varkappa}^{*q,t-\varepsilon}(A) = +\infty$. Par conséquent, $\Delta^*_{\varkappa,q}(A) \geq t - \varepsilon$. □

Lorsque l'ensemble A n'est pas borné, on pose

$$\Delta_{\varkappa,q}(A) = \sup_{R>0} \Delta_{\varkappa,q}\big(A \cap \mathsf{B}\,(x_0, R)\big),$$

où x_0 est un point arbitraire de $\mathbb{X}$.

Lorsque $\varkappa = 0$, $\Delta_{\varkappa,q}$ dépend pas de q et sera noté Δ. C'est alors la *dimension de Minkowski-Bouligand*.

6.3. Les fonctions b, B et τ et leurs tranformées de Legendre. —

On pose

$$(61) \quad b_\varkappa(q) = -\dim_{\varkappa,q}(\mathbb{X}), \;\; B_\varkappa(q) = -\operatorname{Dim}_{\varkappa,q}(\mathbb{X}) \quad \text{et} \quad \tau_\varkappa(q) = -\Delta_{\varkappa,q}(\mathbb{X})\,.$$

Nous adoptons pour $b_\varkappa$ et $B_\varkappa$ une définition l'égèrement différente de la d'efinition originale [**184**] : dans la littérature, ce sont souvent les opposées de ces fonctions qui sont utilisées. La fonction $\tau_\varkappa(q)$ est souvent appelée L^q-spectre dans la littérature.

Définition 6.1. — *Si f est une fonction de $\mathbb{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, la transformée de Legendre-Fenschel de f est la fonction f^* ainsi définie sur $\mathbb{E}'$:*

$$f^*(\alpha) = \inf_{q\in\mathbb{E}}(\langle q, \alpha\rangle - f(q))\,.$$

La fonction f^* est évidemment concave.

Proposition 6.1. — 1. *Les fonctions $B_\varkappa$ et $\tau_\varkappa$ sont concaves.*
2. *On a* $\tau_\varkappa \leq B_\varkappa \leq b_\varkappa$.
3. *On a* $b^*_\varkappa \leq B^*_\varkappa \leq \tau^*_\varkappa$.

Démonstration. La concavité de la fonction $\tau_\varkappa$ est évidente, celle de $B_\varkappa$ l'est moins (voir [**184**]). Les inégalités résultent du lemme 6.2.□

6.4. Un formalisme multifractal. —

6.4.1. L'exposant de Hölder local et ses ensembles de niveau. — La limite au sens de la topologie $\sigma(\mathbb{E}', \mathbb{E})$, lorsqu'elle existe, $\lim\limits_{r\searrow 0} \dfrac{\varkappa(x,r)}{\log r}$, sera notée $\alpha_\varkappa(x)$. Dans le cas où $\varkappa$ est une fonction scalaire, c'est l'exposant de Hölder local en x de la fonction $\mathrm{e}^{\varkappa}$.

Nous nous intéressons aux ensembles de niveau de la fonction $\alpha_\varkappa$ et plus particulièrement à leurs dimensions de Hausdorff et de Tricot.

Si $E \subset \mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{E}'$, on considère les ensembles suivants

$$(62)\ \underline{X}_{\varkappa}(\alpha, E) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \underline{\lim}_{\searrow 0} \frac{\langle w, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} \leq \langle w, \alpha\rangle \text{ pour tout } w \in E \right\},$$

$$(63)\ \overline{X}_{\varkappa}(\alpha, E) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \overline{\lim}_{\searrow 0} \frac{\langle w, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} \leq \langle w, \alpha\rangle \text{ pour tout } w \in E \right\}.$$

Les ensembles $\underline{X}_{\varkappa}(\alpha, \mathbb{E})$ et $\overline{X}_{\varkappa}(\alpha, \mathbb{E})$ seront simplement notés $\underline{X}_{\varkappa}(\alpha)$ et $\overline{X}_{\varkappa}(\alpha)$.

L'ensemble $X_{\varkappa}(\alpha) = \underline{X}_{\varkappa}(\alpha) \cap \overline{X}_{\varkappa}(\alpha)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $\dfrac{\varkappa(x,r)}{\log r}$ tende vers α au sens de la topologie $\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ lorsque r tend vers 0.

6.4.2. Inégalités à la Chernoff. —

Proposition 6.2. — *Soit $\alpha \in \mathbb{E}'$ et $E \subset \mathbb{E}$. On a*

1. $\operatorname{Dim} \overline{X}(\alpha, E) \leq \inf_{q \in E} \langle q, \alpha\rangle - B(q)$,
2. $\dim \underline{X}(\alpha, E) \leq \inf_{q \in E} \langle q, \alpha\rangle - B(q)$.
3. $\dim \overline{X}(\alpha, E) \leq \inf_{q \in E} \langle q, \alpha\rangle - b(q)$,

Si l'on obtient une dimension négative, c'est que l'ensemble correspondant est vide.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $E = \{q\}$.

Démontrons la première assertion. Soit ε un nombre strictement positif et n un entier. Posons

$$A_n(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \frac{\langle q, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \langle q, \alpha\rangle + \varepsilon \text{ si } r \leq 1/n \right\}.$$

Fixons provisoirement $\eta > 0$. Comme $\mathcal{P}_{\varkappa}^{q, -B(q)+\eta/2}(\mathbb{X}) = 0$ il existe une partition dénombrable $\mathbb{X} = \bigcup \mathbb{X}_k$ telle que $\sum \overline{\mathcal{P}}_{\varkappa}^{q, -B(q)+\eta/2}(\mathbb{X}_k) < 1$. Par suite, pour tout k, on a $\overline{\mathcal{P}}_{\varkappa}^{q, -B(q)+\eta}(\mathbb{X}_k) = 0$.

Si $\{\mathsf{B}_j\}$ est un δ-packing centré d'une partie F de $A_n(\varepsilon) \cap \mathbb{X}_k$, avec $\delta \leq 1/n$, on a

$$\sum r_j^{\langle q, \alpha\rangle + \varepsilon - B(q) + \eta} \leq \sum r_j^{-B(q)+\eta}\, \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_j, r_j)\rangle} \leq \overline{\mathcal{P}}_{\varkappa, \delta}^{q, -B(q)+\eta}(\mathbb{X}_k).$$

On en déduit successivement

$$\overline{\mathcal{P}}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-B(q)+\eta}(F\cap\mathbb{X}_k)=0,$$
$$\mathcal{P}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-B(q)+\eta}(A_n(\varepsilon)\cap\mathbb{X}_k)=0,$$
$$\mathcal{P}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-B(q)+\eta}(A_n(\varepsilon))=0,$$

et

$$\operatorname{Dim} A_n(\varepsilon)\leq\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-B(q).$$

Mais on a

$$\left\{x\in\mathbb{X}\mid\overline{\lim_{r\searrow 0}}\,\frac{\langle q,\varkappa(x,r)\rangle}{\log r}\leq\langle q,\alpha\rangle\right\}\subset\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}A_n(1/m),$$

d'où le résultat.

Démontrons maintenant la seconde assertion. Considérons l'ensemble

$$A_n=\left\{x\in\mathbb{X}\mid\underline{\lim}_{r\searrow 0}\frac{\langle q,\varkappa(x,r)\rangle}{\log r}<\langle q,\alpha\rangle+\frac{1}{n}\right\}.$$

Comme précédemment, fixons η et considérons les $\mathbb{X}_k$.

Soit $F\subset A_n\cap\mathbb{X}_k$ et $\delta>0$. Pour chaque $x\in F$, il existe r_x tel que $0<r_x<\delta$ et $r_x^{\langle q,\alpha\rangle+\frac{1}{n}}\leq \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x,r_x)\rangle}$. Par la propriété de Besicovitch, on peut extraire de la famille de boules $\{\mathsf{B}\,(x,r_x)\}_{x\in F}$ une famille $\left\{\{\mathsf{B}_{i,j}\}_{j\geq 1}\right\}_{1\leq i\leq\theta}$ qui recouvre $F\cap\mathbb{X}_k$ et telle que chaque famille $\{\mathsf{B}_{i,j}\}_{j\geq 1}$ soit un packing. Dans ces conditions on a

$$\begin{aligned}\sum r_{i,j}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-B(q)+\eta} &\leq \sum r_{i,j}^{-B(q)+\eta}\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_{i,j},r_{i,j})\rangle}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\theta}\sum_{j} r_{i,j}^{-B(q)+\eta}\,\mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_{i,j},r_{i,j})\rangle}\\ &\leq \theta\overline{\mathcal{P}}_{\varkappa,\delta}^{q,-B(q)+\eta}(\mathbb{X}_k),\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\mathcal{H}}_{\delta}^{\langle q,\alpha\rangle+1/n-B(q)+\eta}(F)\leq\theta\,\overline{\mathcal{P}}_{\varkappa,\delta}^{q,\eta-B(q)}(\mathbb{X}_k).$$

Il s'ensuit que $\mathcal{H}^{\langle q,\alpha\rangle+1/n-B(q)+\eta}(A_n\cap\mathbb{X}_k)=0$, ce qui montre que l'on a $\dim A_n\cap\mathbb{X}_k\leq\langle q,\alpha\rangle+1/n-B(q)+\eta$. Ceci étant valable pour tout k et pour tout η, on a $\dim A_n\leq\langle q,\alpha\rangle+1/n-B(q)$.

On conclut en remarquant que $\underline{X}_{\varkappa}(\alpha,\{q\})=\bigcap_{n\geq 1}A_n$.

Passons à la démonstration de la dernière assertion. Soit ε un nombre strictement positif et n un entier. Posons

$$A_n(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \frac{\langle q, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \langle q, \alpha\rangle + \varepsilon \text{ si } r \leq 1/n \right\} .$$

Fixons provisoirement $\eta > 0$.

Soit F une partie de $A_n(\varepsilon)$ et δ un nombre tel que $0 < \delta \leq 1/n$. Comme $\mathcal{H}_{\varkappa}^{q,-b(q)+\eta}(\mathbb{X}) = 0$ on a $\overline{\mathcal{H}}_{\varkappa}^{q,-b(q)+\eta}(F) = 0$. Il existe donc un δ-recouvrement centré $\{\mathsf{B}_j\}$ de F tel que l'on ait

$$\sum r_j^{-b(q)+\eta}\, \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_j, r_j)\rangle} \leq 1.$$

On a alors

$$\sum r_j^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-b(q)+\eta} \leq \sum r_j^{-b(q)+\eta}\, \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_j, r_j)\rangle} \leq 1,$$

d'où

$$\overline{\mathcal{H}}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-b(q)+\eta}(F) \leq 1$$

et

$$\mathcal{H}^{\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon-b(q)+\eta}\big(A_n(\varepsilon)\big) \leq 1.$$

On a donc $\dim A_n(\varepsilon) \leq \langle q, \alpha\rangle + \varepsilon - b(q)$ et l'on conclut comme précédemment. □

6.4.3. Inégalités opposées. — Si $v \in \mathbb{E}$ et si $|B_{\varkappa}(q)| < \infty$, on considère la dérivée de la fonction $B_{\varkappa}$ dans la direction v

$$\partial_v B_{\varkappa}(q) = \lim_{t\searrow 0} \frac{B_{\varkappa}(q+tv) - B_{\varkappa}(q)}{t} ,$$

si elle existe. Sa différentielle, si elle existe, est notée $B'_{\varkappa}(q) \in \mathbb{E}'$. Dans ce dernier cas, on a $\partial_v B_{\varkappa}(q) = \langle v, B'_{\varkappa}(q)\rangle$.

Lemme 6.4. — *Soit $v \in \mathbb{E}$ et q tel que $|B_{\varkappa}(q)| < \infty$. Si ϕ est une jauge d'ordre supérieur ou égal à $-B_{\varkappa}(q)$, on a*

$$\phi\text{-}\mathcal{H}_{\varkappa}^{q} \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \varliminf_{r\searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \partial_v B_{\varkappa}(q) \right\} = 0\,.$$

Démonstration. Soit $\lambda < \partial_v B_{\varkappa}(q)$. Choisissons $t > 0$ et $\eta > 0$ tels que $B_{\varkappa}(q + tv) > B_{\varkappa}(q) + \lambda t + \eta$. On a alors, par définition de $B_{\varkappa}(q + tv)$,

$$\mathcal{P}_{\varkappa}^{q+tv, B_{\varkappa}(q)+\lambda t+\eta}(\mathbb{X}) = 0. \tag{64}$$

Considérons l'ensemble

$$A(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \lambda \right\}.$$

Soit $A' \subset A(\lambda)$ et $\delta \in]0,1[$. Pour tout $x \in A'$, il existe $r_x \in]0,\delta[$ tel que $\langle v, \varkappa(x,r)\rangle - \lambda \log r > 0$. Extrayons de la famille $\{\mathsf{B}\,(x, r_x)\}_{x \in A'}$ de boules θ packings $\left\{\{\mathsf{B}_{i,j}\}_{j\geq 1}\right\}_{1\leq i \leq \theta}$ qui, tous ensemble, recouvrent A'. On a

$$\begin{aligned}
\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}(A') &\leq \sum_{1\leq i\leq\theta}\sum_j \phi(r_{i,j})\,\mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_{i,j}, r_{i,j})\rangle} \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq\theta}\sum_j \phi(r_{i,j})\,\mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_{i,j}, r_{i,j})\rangle}\,\mathrm{e}^{t(\langle v, \varkappa(x,r)\rangle - \lambda\log r)} \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq\theta}\sum_j r_{i,j}^{-\lambda t}\phi(r_{i,j})\,\mathrm{e}^{\langle q+tv, \varkappa(x_{i,j}, r_{i,j})\rangle} \\
&\leq \sup_{0<r<\delta} r^{B_\varkappa(q)+\eta}\phi(r) \sum_{1\leq i\leq\theta}\sum_j r_{i,j}^{-(B_\varkappa(q)+\lambda t)+\eta}\,\mathrm{e}^{\langle q+tv, \varkappa(x_{i,j}, r_{i,j})\rangle} \\
&\leq \theta \sup_{0<r<\delta} r^{B_\varkappa(q)+\eta}\phi(r)\;\overline{\mathcal{P}}^{q+tv,-(B_\varkappa(q)+\lambda t+\eta)}_{\varkappa,\delta}.
\end{aligned}$$

En vertu de (64), il existe une suite $\{U_n\}$ de parties de $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X} \subset \bigcup U_n$ et $\sum \overline{\mathcal{P}}^{q+tv,-(B_\varkappa(q)+\lambda t+\eta)}_{\varkappa} \leq 1$.

En faisant tendre δ vers 0, on obtient $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}(A' \cap U_n) = 0$, d'où $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_{\varkappa,\delta}(A') = 0$ et $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_{\varkappa,\delta}(A(\lambda)) = 0$. $\square$

Pour $x \in \mathbb{X}$, considérons la fonction

$$\rho_x(v) = \varliminf_{r\searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r}$$

et le cône

$$C_x = \{v \in \mathbb{E} \mid \rho_x(v > -\infty)\}.$$

Lemme 6.5. — *La fonction ρ_x est concave et le cône C_x convexe. Si l'intérieur C_x° de C_x est non vide, ou bien ρ_x est continu sur C_x°, ou bien il existe $v \in C_x^\circ$ tel que $\rho_x(v) = +\infty$, et alors $\rho_x(v) = +\infty$ pour tout $x \in C_x^\circ$*

Démonstration. Supposons $C_x^\circ \neq \emptyset$ et $\rho_x(v) < \infty$ pour tout $v \in C_x^\circ$. Posons

$$\rho_{x,\delta} = \inf_{0<r<\delta} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r}.$$

Etant donnés deux entiers positifs m et n considérons l'ensemble $F_{m,n} = \left\{v \in C_x^\circ \mid \rho_{x,1/m}(v) \geq -n\right\}$. Les $F_{m,n}$ sont fermés car les fonctions $\rho_{x,1/m}$ sont semi-continues supérieurement (s.c.s) et l'on a $C_x^\circ = \bigcup F_{m,n}$. Par conséquent, en vertu du théorème de Baire, l'un de ces ensembles a un intérieur non vide. Comme $\rho_x \geq \rho_{x\delta}$, cela signifie que C_x° contient une boule ouverte sur laquelle la fonction ρ_x est bornée inférieurement. Cela implique que la fonction concave ρ_x est localement bornée sur C_x° et y est donc continue. □

Proposition 6.3. — *Supposons que, pour un q, $|B_\varkappa(q)|$ soit fini et la fonction $v \mapsto \partial_v B_\varkappa(q)$ soit semi-continue supérieurement. Alors, si ϕ est une jauge comme dans le lemme 6.4, on a*

$$\phi\text{–}\mathcal{H}^q_\varkappa \left\{ x \mid \exists v \in \mathbb{E},\ \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \partial_v B_\varkappa(q) \right\} = 0\,.$$

Démonstration. Soit E une partie dense dans $\mathbb{E}$. Il résulte des propriétés de continuité de ρ_x et $\partial_v B_\varkappa(q)$ que l'on a

$$\left\{ x \mid \exists v \in \mathbb{E},\ \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \partial_v B_\varkappa(q) \right\} \subset \left\{ x \mid \exists v \in E,\ \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} < \partial_v B_\varkappa(q) \right\}.$$

On conclut au moyen du lemme 6.4. □

Proposition 6.4. — *Soit ϕ une jauge comme dans le lemme 6.4. Supposons que, pour un q, $|B_\varkappa(q)|$ soit fini, $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_\varkappa(\mathbb{X})$ soit non nul et que la fonction $v \mapsto \partial_v B_\varkappa(q)$ soit semi-continue supérieurement. Alors*

$$\dim \left\{ x \mid \forall v \in \mathbb{E},\ \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} \geq \partial_v B_\varkappa(q) \right\} \geq \partial_v B_\varkappa(q) - B_\varkappa(q)\,.$$

Démonstration. Posons $A = \left\{ x \mid \forall v \in \mathbb{E},\ \varliminf_{r \searrow 0} \frac{\langle v, \varkappa(x,r)\rangle}{\log r} \geq \partial_v B_\varkappa(q) \right\}$. Il résulte du lemme précédent que $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_\varkappa(A) > 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. si $n \geq 1$, on pose

$$A_n(\varepsilon) = \left\{ x \in A \mid \langle q, \varkappa(x,r)\rangle < \big(\partial_q B_\varkappa(q) - \varepsilon\big) \log r,\ \text{pour } r \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n(\varepsilon)$, il existe n tel que $\phi\text{–}\mathcal{H}^q_\varkappa(A_n(\varepsilon)) > 0$. Donc, il existe $F \subset A_n(\varepsilon)$ tel que $\phi\text{–}\overline{\mathcal{H}}^q_\varkappa(F) > 0$. Si $\{\mathsf{B_j}\}$ est un δ-recouvrement centré de F, avec $\delta < 1/n$, on a

$$\begin{aligned} \sum r_j^{\partial_q B_\varkappa(q) - B_\varkappa(q) - \varepsilon} &\geq \sum \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa(x_j, r_j)\rangle - B_\varkappa(q)} \\ &\geq \overline{\mathcal{H}}^{q, -B_\varkappa(q)}_{\varkappa,\delta}(F), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathcal{H}^{\partial_q B_{\varkappa}(q)-B_{\varkappa}(q)-\varepsilon}\big(A_n(\varepsilon)\big) \geq \overline{\mathcal{H}}^{\partial_q B_{\varkappa}(q)-B_{\varkappa}(q)-\varepsilon}(F) \geq \overline{\mathcal{H}}_{\varkappa}^{q,-B_{\varkappa}(q)}(F) > 0.$$

Ainsi, $\dim A \geq \dim A_n(\varepsilon) \geq \partial_q B_{\varkappa}(q) - B_{\varkappa}(q) - \varepsilon.\square$

Théorème 6.1. — *Si, pour un $q \in \mathbb{E}$, $B'_{\varkappa}(q)$ existe et si ϕ–$\mathcal{H}^q_{\varkappa}(\mathbb{X}) > 0$, pour une jauge ϕ d'ordre supérieur ou égal à $-B_{\varkappa}(q)$, on a*

1. $b_{\varkappa}(q) = B_{\varkappa}(q)$,
2. $\dim X\big(B'_{\varkappa}(q)\big) = \operatorname{Dim} X\big(B'_{\varkappa}(q)\big) = B^*_{\varkappa}\big(B'_{\varkappa}(q)\big)$.

Démonstration. Cela résulte des propositions 6.2 et 6.4.$\square$

Remarque 6.2. — *On verra plus loin dans l'étude des mesures auto-affines que les fonctions B_μ et b_μ diffèrent en général et dans ce cas c'est cette dernière qui est la bonne fonction à considérer. Pour d'autres exemples de mesures pour lesquelles b_μ et B_μ diffèrent, voir* [**185, 31**].

6.4.4. La fonction $f_{\varkappa}(\alpha)$. — Soit $\alpha \in \mathbb{X}'$, $\delta \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M_{\varkappa,r,\varepsilon}(\alpha)$ le maximum des cardinaux des packings de l'ensemble

$$A_{\varkappa,\varepsilon}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \left\| \frac{\varkappa(x,r)}{\log r} - \alpha \right\|_{\mathbb{E}'} < \varepsilon \right\}$$

par des boules de rayons compris entre $r/2$ et r. On pose

$$f_{\varkappa}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \overline{\lim_{r \searrow 0}} \frac{\log M_{\varkappa,r,\varepsilon}}{\log r}\,. \tag{65}$$

Proposition 6.5. — *On a $f_{\varkappa}(\alpha) \leq \tau^*(\alpha)$.*

Démonstration. Soit $q \in E$ tel que $\tau_{\varkappa}(q) > -\infty$ et $\lambda > -\tau_{\varkappa}(q)$. Il existe $\delta_0 < 1$ tel que, pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$, $\mathcal{P}^{*q,\lambda}_{\varkappa,\delta}(\mathbb{X}) = 0$.

Si $\{\mathsf{B}_j\}_{j\in J}$ est un δ-packing de $A_{\varkappa,\varepsilon}(\alpha)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i\in J} r_j^{\lambda}\, \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} &\geq \min\{1,2^{-\lambda}\}\, r^{\lambda} \sum_{j\in J} \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa(x_j,r_j)\rangle} \\ &\geq \min\{1,2^{-\lambda}\}\, r^{\lambda+\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon\|q\|_{\mathbb{E}'}} \operatorname{card}(J)\,. \end{aligned}$$

On a donc $M_{\varkappa,r,\varepsilon}(\alpha) \leq \max\{1,2^{\lambda}\}\, r^{-(\lambda+\langle q,\alpha\rangle+\varepsilon\|q\|_{\mathbb{E}'})}$, d'où $f_{\varkappa}(\alpha) \leq \lambda + \langle q,\alpha\rangle$, $f_{\varkappa}(\alpha) \leq -\tau_{\varkappa}(q) + \langle q,\alpha\rangle$, et $f_{\varkappa}(\alpha) \leq \inf_{q\in\mathbb{E}'} \langle q,\alpha\rangle - \tau_{\varkappa}(q) = \tau^*_{\varkappa}(\alpha)$. $\square$

6.5. Multifractals et grandes déviations. —

6.5.1. Des arbres homogènes et leurs bords. — On se donne un entier $b \geq 2$. On considère l'ensemble $\Sigma_b^* = \bigcup_{n\geq 0} \Sigma_b^n$ des mots sur l'alphabet $\Sigma_b = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, où ϵ désignant le mot vide, on convient que $\Sigma_b^0 = \{\epsilon\}$. La concaténation de deux mots v et w est le mot vw obtenu en écrivant w à la suite de v. Muni de la concaténation, Σ_b^* est un monoïde dont ϵ est l'élément neutre. La longueur d'un mot w, c'est-à-dire son nombre de lettres, est noté $|w|$.

On considére aussi l'ensemble Σ_b^+ des mots infinis sur Σ_b (ou, si l'on préfère, des suites $(x_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de Σ_b). On définit de façon évidente la concaténation d'un mot et d'un mot infini.

Si v et w sont deux mots, finis ou non, on pose $\mathsf{d}(v, w) = b^{-n}$ où n est la longueur du plus long préfixe commun à v et w. On définit ainsi une distance ultramétrique sur Σ_b^* et sur Σ_b^+. Le complété de Σ_b^* est $\Sigma_b^* \coprod \Sigma_b^+$.

Si $w \in \Sigma_b^*$, on pose

$$[w] = \left\{ wx \mid x \in \Sigma_b^+ \right\}.$$

C'est un cylindre du produit Σ_b^+ ; c'est également une boule pour la métrique d.

6.5.2. Analyse multifractale sur Σ_b^+. — Dans ce contexte, $\mathcal{P}_{\varkappa,\delta}^{*q,t}(\mathbb{X})$ est facile à calculer :

$$\mathcal{P}_{\varkappa,\delta}^{*q,b^{-n}}(\mathbb{X}) = b^{-nt} \sum_{w\in\Sigma_b^n} \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa([w])\rangle}.$$

Il est aisé d'en déduire une expression de $\tau_\varkappa$;

$$\tau_\varkappa(q) = \varliminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log_b \sum_{w\in\Sigma_b^n} \mathrm{e}^{\langle q, \varkappa([w])\rangle}.$$

6.5.3. Un exemple. — Prenons pour $\mathbb{E}$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, avec $N \leq b$, et donnons-nous une famille $\big((p_{i,j})_{0\leq j<b}\big)_{1\leq i\leq N}$ de nombres strictement positifs. Définissons par récurrence $p_{i,w}$ pour i fixé et $w \in \Sigma_b^+$:

$$p_{i,\epsilon} = 1 \quad \text{et} \quad p_{i,wj} = p_{i,w} p_{i,j};$$

et posons

$$\varkappa([w]) = \big(\log p_{i,w}\big)_{1\leq i\leq N}.$$

Lorsque $\sum_{j=0}^{b-1} p_{i,j} = 1$, l'application $[w] \mapsto p_{i,w}$ s'étend en une mesure de probabilité sur Σ_b^+. C'est alors une mesure multinomiale, que l'on appelle aussi *mesure de Besicovitch*.

On a, si $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in\Sigma_b^{n+1}} \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa([w])\rangle} &= \sum_{w\in\Sigma_b^{n+1}} \prod_{i=1}^{N} p_{i,w}^{q_i} \\
&= \sum_{w\in\Sigma_b^{n}} \sum_{j=0}^{b-1} \prod_{i=1}^{N} p_{i,w}^{q_i}\, p_{i,j}^{q_i} \\
&= \left(\sum_{w\in\Sigma_b^{n}} \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa([w])\rangle} \right) \left(\sum_{j=0}^{b-1} \prod_{i=1}^{N} p_{i,j}^{q_i} \right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\tau(q) = -\log_b \sum_{j=0}^{b-1} \prod_{i=1}^{N} p_{i,j}^{q_i} .$$

Le vecteur q étant fixé, on pose $r_j = \dfrac{\prod_{1\le i\le N} p_{i,j}^{q_i}}{\sum_{0\le j<b} \prod_{1\le i\le N} p_{i,j}^{q_i}}$, $r_{i,\epsilon} = 1$ et par récurrence, $r_{wj} = r_w r_j$. La fonction $[w] \mapsto r_w$ se prolonge en une probabilité μ_q sur Σ_b^+ et l'on a

$$\mu_q([w]) = \mathrm{e}^{\langle q,\varkappa([w])\rangle}\, b^{-n\tau(q)} .$$

Autrement dit, μ_q est une mesure de Frostman pour $\mathcal{H}_{\varkappa}^{q,-\tau(q)}$; cela implique $\tau(q) \ge b_{\varkappa}$, d'où $\tau(q) = b_{\varkappa}(q) = b_{\varkappa}(q)$. Aussi, la fonction $\varkappa$ vérifie le formalisme multifractal en tout point q.

Le calcul de la transformée de Legendre se mène facilement jusqu'au bout dans le cas particulier suivant

$$p_{i,j} = \begin{cases} b^{-1}, & \text{si } \ j = i-1, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\tau(q) = -\log_b \left(\sum_{i=1}^{N} b^{-q_i} + b - N \right)$; dans ces conditions $\tau^*(\alpha) = -\infty$ si l'un des α_i est négatif ou si $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i > 1$ et

$$\tau^*(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} -\alpha_i \log_b(\alpha_i) - \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) \log_b \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right)}{b-N}$$

dans les autres cas.

Il est commode d'introduire d'autres notations : si $x \in \Sigma_b^+$, on pose

$$\varphi_n(x,j) = \frac{1}{n} \operatorname{card} \{m \mid 1 \le m \le n \text{ et } x_m = j\} .$$

Alors $\varkappa(x, b^{-n}) = \big(\varphi_n(x,j)\big)_{1\le j\le N}$.

Si maintenant on se donne des nombres $f_j \geq 0$, pour $1 \leq j \leq N$, tels que

$$\sum_{j=1}^{N} f_j \begin{cases} = 1, & \text{si } \ N = b, \\ \leq 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

il résulte de ce qui précède que la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$\{x \ : \ \lim \varphi_n(x,j) = f_j \text{ pour } 1 \leq j \leq N\}$$

vaut

$$\sum_{i=1}^{N} -f_i \log_b f_i - \left(1 - \sum_{i=1}^{N} f_i\right) \log_b \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N} f_i\right)}{b - N}.$$

On retrouve ainsi le théorème d'Eggleston. On peut également par ce procédé étendre au cas d'une base quelconque le résultat de Besicovitch relatif à la dimension de l'ensemble des nombres dont la fréquence supérieure des 1 dans leur développement dyadique est majorée par un nombre f (voir [**200**]).

Remarque 6.3. — *Dans les chapitres 7 et 8, étant donnée une mesure μ sur un espace métrique et la fonction $\varkappa(x,r) = \log(\mu(B(x,r)))$, les fonctions b, B, τ et les ensembles $E(\alpha)$ associées à $\varkappa$ seront indexés par μ plutôt que par $\varkappa = \log(\mu)$.*

La plupart des mesures analysées dans ces chapitres ont des propriétés d'autosimilarité. En conséquence, on démontre que $\dim E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ *pour tout α tel que $\tau_\mu^*(\alpha) \geq 0$. On a alors automatiquement $b_\mu = B_\mu = \tau_\mu$ et* $\mathrm{Dim}\, E_\mu(\alpha) = \dim E_\mu(\alpha)$. *Nous ne le mentionnerons pas dans les énoncés. Nous rencontrerons dans les sections 7.4 et 7.5.3 une classe naturelle de mesures auto-affines pour lesquelles l'égalité $b_\mu = B_\mu = \tau_\mu$ n'a pas lieu, et* $\dim E_\mu(\alpha) = b_\mu^*(\alpha)$ *quand $b_\mu^*(\alpha) \geq 0$.*

7. Analyse multifractale des fonctions presque multiplicatives

Nous établissons dans la section 7.1 un théorème général d'analyse multifractale pour les mesures presque multiplicatives (théorème 7.1) et sa traduction en principe variationnel (théorème 7.2). L'extension de ce principe variationnel à l'analyse multifractale de moyennes de Birkhoff sur des systèmes dynamiques plus généraux est ensuite discutée dans la section 7.2. La section 7.3 présente une extension du théorème 7.1 au cas de mesures définies à l'aide de normes de produits de Bernoulli de matrices positives, qui n'est pas couvert par les mesures presque multiplicatives, mais est fondamental dans l'étude des mesures auto-similaires. Puis la section 7.4 traite l'analyse multifractale des mesures quasi-Bernoulli sur l'espace symbolique munie d'une métrique "auto-affine", ce qui prépare au résultat d'analyse multifractale des projetées des mesures de Gibbs sur les tapis de Sierpinski. La section 7.5 aborde plus généralement l'analyse multifractale des réalisations géométriques des mesures presque multiplicatives considérées dans la section 3.5. En particulier, on propose un état de l'art de l'analyse multifractale des mesures auto-similaires. Nous recommandons au lecteur de se reporter à la remarque 6.3 avant de commencer la lecture des résultats qui suivent.

7.1. Mesures presque multiplicatives sur l'espace symbolique. —

Théorème 7.1. — *Soit μ une mesure presque multiplicative sur Σ_m^+. Alors,* $\dim E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ *en tout point α tel que $\tau_\mu^*(\alpha) \geq 0$. De plus, si μ est quasi-Bernoulli la fonction τ_μ est dérivable, et si μ est la mesure de Gibbs associée à un potentiel höldérien ϕ la fonction τ_μ est analytique.*

L'analyticité de τ lorsque μ est la mesure de Gibbs associée à un potentiel höldérien ϕ provient de l'égalité

$$\tau(q) = \frac{qP(\phi) - P(q\phi)}{\log m}$$

et de l'analyticité de la fonction $q \mapsto P(q\phi)$, qui provient, elle, du formalisme thermodynamique [**206**]. Les exemples de convolutions de Bernoulli explicités dans la section 7.5.1 montrent que, si le potentiel est seulement continu, la fonction τ_μ peut avoir des points de non dérivabilité.

Le résultat précédent peut aussi s'exprimer sous la forme d'un principe variationnel de la façon suivante :

Théorème 7.2. — *Sous les hypothèses du théorème 7.1 on a*

$$\dim E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha) = \frac{1}{\log m} \max_{\nu \in \mathcal{F}_\mu(\alpha)} h_\nu$$

en tout point α tel que $\tau_\mu^*(\alpha) \geq 0$, où

$$\mathcal{F}_\mu(\alpha) = \Big\{\nu \in \mathcal{M}(\sigma) : \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\int \log_m \mu([x|_n])\,\mathrm{d}\nu = \alpha\Big\}.$$

Le fait que l'ensemble $\mathcal{F}_\mu(\alpha)$ ait un sens est une conséquence immédiate du corollaire 3.1.

Nous allons d'abord démontrer la validité du formalisme pour une mesure quasi-Bernoulli, puis le résultat plus profond que constitue le théorème 7.1 ; après quoi nous donnerons la preuve du théorème 7.2.

Démonstration du théorème 7.1 (Cas d'une mesure μ quasi-Bernoulli). Le calcul de $\dim E_\mu(\alpha)$ est obtenu en tout point de dérivabilité de τ_μ dans [**40**] puis la dérivabilité de τ_μ est établie dans [**114**].

Pour $q \in \mathbb{R}$, notons μ_q la mesure associée à ψ^q comme dans la proposition 3.1.

Il est aisé de voir que $\tau_\mu(q) = -P(q \log \psi)/\log m$ et qu'il existe $C > 1$ tel que

$$C^{-1}\mu([w])^q b^{n\tau_\mu(q)} \leq \mu_q([w]) \leq C\mu([w])^q b^{n\tau_\mu(q)}. \tag{66}$$

D'après le lemme 6.1, cela implique la validité du formalisme en $\tau_\mu'(q)$ dès que ce nombre existe. Suivons l'approche de [**114**] pour obtenir la dérivabilité de τ_μ.

Tout d'abord, on vérifie que $\tau_{\mu_q}(r) = \tau_\mu(qr) - r\tau_\mu(q)$ et que μ_q est quasi-Bernoulli pour tout $q \in \mathbb{R}$. Par conséquent, si l'on sait que $\tau_\mu'(1)$ existe pour toute mesure quasi-Bernoulli, la dérivabilité de τ_{μ_q} en 1 implique celle de τ_μ en q si $q \neq 0$. Il ne reste donc plus qu'à établir la dérivabilité en 0 et en 1.

La dérivabilité en 1 résulte du théorème 5.16. De plus, un argument de sous-multiplicativité permet d'établir que pour tout $q \in \mathbb{R}$ on a

$$|\tau_{\mu,n}(q) - \tau_\mu(q)| \leq |q| \log_m C/n.$$

Comme $\tau_{\mu,n}(0) = \tau_\mu(0)$, nous avons

$$\big|(\tau_{\mu,n}(q) - \tau_{\mu,n}(0))/q - (\tau_\mu(q) - \tau_\mu(0))/q\big| \leq \log_m C/n$$

pour tout n et $q \neq 0$. Comme $\tau_{\mu,n}$ est dérivable en 0, cela implique

$$\tau_\mu'(0^-) = \tau_\mu'(0^+) = \lim_{n\to\infty} \tau_{\mu,n}'(0).$$

Notons que nous n'avons pas traité le cas des exposants de Hölder extrémaux, c'est-à-dire les bornes de l'intervalle $\{\alpha \geq 0 : \tau_\mu^*(\alpha) \geq 0\}$, qui sont respectivement égales à

$$\alpha_{\min} = \lim_{q\to\infty} \frac{\tau_\mu(q)}{q}, \qquad \alpha_{\max} = \lim_{q\to-\infty} \frac{\tau_\mu(q)}{q}.$$

Nous y venons, avec l'étude du cas où le potentiel est seulement supposé continu. □

Démonstration du théorème 7.1 (Cas général). Le théorème 7.1 dans le cas général repose sur une approche plus élaborée que la précédente et mise en œuvre dans [**80, 96**] pour l'analyse multifractale des sommes de Birkhoff d'un potentiel vectoriel continu et celle des exposants de Lyapounov de produits de matrices continues et strictement positives (pour le cas des mesures de Gibbs au sens faible, on pourra aussi consulter [**182**] et [**106**] qui utilisent une approche reposant en bonne partie sur le principe variationnel (44)). Nous en donnons une preuve en quatre étapes. Pour $w \in \Sigma_m^*$, posons

$$\alpha(w) = -\frac{\log_m \mu([w])}{|w|}.$$

Etape 1. Considérons l'ensemble L des $\alpha \geq 0$ tels que $E_\mu(\alpha) \neq \emptyset$. Par définition de la transformée de Legendre et à cause du formalisme multifractal, on sait que L est inclus dans $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, où $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$ sont décrits comme précédemment. En fait, on a $L = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, et cet intervalle est borné.

Pour montrer que L est un intervalle, introduisons les suites

$$\alpha_n = \min_{w \in \Sigma_m^n} \alpha(w), \ \beta_n = \max_{w \in \Sigma_m^n} \alpha(w), \ A_n = n\alpha_n \ \text{ et } \ B_n = n\beta_n.$$

On vérifie en utilisant (7) que l'on a

$$A_{n+p} \geq A_n + A_p - \log_m \gamma_n/n, \ \text{ et } \ B_{n+p} \leq B_n + B_p + \log_m \gamma_n/n$$

pour tous $n, p \geq 1$. Par conséquent les suites $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$, qui sont bornées (car ϕ l'est), sont convergentes. Soit

$$\alpha_L = \lim_{n\to\infty} \alpha_n, \qquad \beta_L = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Par définition, on a $L \subset [\alpha_L, \beta_L]$. Montrons que pour tout $t \in [\alpha_L, \beta_L]$, $E_\mu(t) \neq \emptyset$, i.e. $L = [\alpha_L, \beta_L]$.

Soit $t \in [\alpha_L, \beta_L]$. Ecrivons $t = \lambda a + (1-\lambda) b$ avec $\lambda \in [0,1]$. Pour $n \geq 1$ posons $r_{2n-1} = \alpha_L$ et $r_{2n} = \beta_L$. D'après ce qui précède, il existe une suite de mots $(w_n)_{n\geq 1}$ telle que $w_n \in \Sigma_m^n$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n\to\infty} |\alpha(w_n) - r_n| = 0$. Posons alors pour $n \geq 1$, $N_n = [\lambda n + \log n]$ si n est impair et $N_n = [(1-\lambda)n + \log n]$ sinon. Pour $n \geq 0$ posons $s_n = \sum_{k=1}^n kN_k$. Soit x le mot infini tel que pour tout $n \geq 1$, $x_{s_n+1} \cdots x_{s_{n+1}}$ soit obtenu en concaténant N_{n+1} copies du mot w_{n+1}. Par construction, on a $x \in E_\mu(t)$.

Pour identifier $\alpha_{\min}$ avec α_L et $\alpha_{\max}$ avec β_L, il suffit de remarquer que l'on a

$$b^{-n\alpha_n q} \leq \sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu([w])^q \leq m^n b^{-n\alpha_n q} \quad \forall q \geq 0$$

$$b^{-n\beta_n q} \leq \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu([w])^q \leq m^n b^{-n\beta_n q} \quad \forall q < 0.$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} q\alpha_L - 1 \leq \tau_\mu(q) \leq q\alpha_L \quad \forall q \geq 0 \\ q\beta_L - 1 \leq \tau_\mu(q) \leq q\beta_L \quad \forall q < 0. \end{aligned}$$

Etape 2. Le spectre des grandes déviations de μ. Pour tout $\alpha \in L$, $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$ soit

$$F(\alpha; n, \epsilon) = \big\{w \in \Sigma_m^n : |\alpha(w) - \alpha| \leq \epsilon\big\} \quad \text{et} \quad f(\alpha; n, \epsilon) = \#F(\alpha; n, \epsilon).$$

On a le fait suivant :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log f(\alpha; n, \epsilon)}{\log m^n} = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log f(\alpha; n, \epsilon)}{\log m^n}, \tag{67}$$

et, si l'on note $f_\mu(\alpha)$ la limite, la fonction f_μ est concave et continue sur L.

Soit $\alpha \in L$ et $\epsilon > 0$. Tout d'abord, il existe $N \geq 1$ tel que

$$f(\alpha; n, \epsilon)^p \leq f(\alpha; np, 2\epsilon) \quad (\forall n \geq N,\ \forall p \geq 1). \tag{68}$$

Par définition de L, il existe $x \in E_\mu(\alpha)$ et $N \geq 1$ tels que pour tout $n \geq N$ on ait $[x|_n] \in F(\alpha; n, \epsilon)$, donc $F(\alpha; n, \epsilon) \neq \emptyset$. Quitte à choisir N plus grand, nous pouvons supposer que $\log_m \gamma_n \leq \epsilon n$ pour $n \geq N$.

Pour $p \geq 1$ et $n \geq N$ soit $(w_1, \dots, w_p) \in F(\alpha; n, \epsilon)^p$, et $w = w_1 \cdots w_p \in \Sigma_m^{np}$. Grâce à (7) on a

$$\gamma_n^{-(p-1)} \prod_{k=1}^p \mu([w_k]) \leq \mu([w]) \leq \gamma_n^{(p-1)} \prod_{k=1}^p \mu([w_k])$$

et le choix des w_k implique que $|\alpha(w) - \alpha| \leq 2\epsilon$. On a donc bien (68) d'où l'on déduit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log f(\alpha; n, \epsilon)}{\log m^n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log f(\alpha; n, 2\epsilon)}{\log m^n},$$

puis (67).

Montrons la concavité de f_μ. Soit α et β dans L et p et q deux entiers strictement positifs. D'après ce qui précède, pour n assez grand on a

$$f(\alpha; n, \epsilon)^p f(\beta; n, \epsilon)^q \leq f(\alpha; np, 2\epsilon) f(\beta; nq, 2\epsilon). \tag{69}$$

Mais si $w \in F(\alpha; np, 2\epsilon)$ et $w' \in F(\beta; nq, 2\epsilon)$, en utilisant à nouveau (7) nous obtenons que pour n assez grand $w \cdot w' \in F\big((p\alpha + q\beta)/(p + q); n(p + q), 3\epsilon\big)$, et donc

$$f(\alpha; np, 2\epsilon) f(\beta; nq, 2\epsilon) \leq f\Big(\frac{p\alpha + q\beta}{p + q}; n(p + q), 3\epsilon\Big). \tag{70}$$

Des propriétés (67), (69) et (70) nous déduisons que

$$\frac{p}{p+q}f_\mu(\alpha)+\frac{q}{p+q}f_\mu(\beta)\le f_\mu\Big(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}\Big).$$

Pour montrer la concavité et la continuité de f_μ sur L il ne reste plus qu'à établir que f_μ est semi-continue supérieurement.

Soit $\alpha\in L$, $\eta>0$ et $\epsilon>0$ tels que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log f(\alpha;n,\epsilon)}{\log m^n}<f_\mu(\alpha)+\eta.$$

Pour $\beta\in(\alpha-\epsilon/3,\alpha+\epsilon/3)$, il est clair que $F(\beta;n,\epsilon/3)\subset F(\alpha;n,\epsilon)$ et donc $f(\beta;n,\epsilon/3)\subset f(\alpha;n,\epsilon)$. Par conséquent,

$$f_\mu(\beta)\le\liminf_{n\to\infty}\frac{\log f(\beta;n,\epsilon/3)}{\log m^n}\le\liminf_{n\to\infty}\frac{\log f(\alpha;n,\epsilon)}{\log m^n}\le f_\mu(\alpha)+\eta.$$

Etape 3. $\dim E_\mu(\alpha)\ge f_\mu(\alpha)$ *pour* $\alpha\in L$. Soit $\delta>0$. Nous allons construire un ensemble de Cantor de type "Moran" dans l'ensemble $E_\mu(\alpha)$ tel que $\dim K\ge f_\mu(\alpha)-\delta$. D'après le point précédent, nous pouvons choisir une suite d'entiers strictement positifs ℓ_j croissant vers l'infini et une suite de réels strictement positifs ϵ_j convergeant vers 0 telles que pour tout $j\ge1$ on ait

$$f(\alpha;\ell_j,\epsilon_j)>m^{\ell_j(f_\mu(\alpha)-\delta)}.$$

Définissons

$$N_1=1;\quad N_j=2^{\ell_{j+1}+N_{j-1}}\quad(\forall j\ge2),$$

$$g_j=\sum_{k=1}^{j}N_k\ell_k\quad(\forall j\ge1).$$

Posons

$$G_0=\{\emptyset\},\quad G_j=\ \odot_{k=1}^{j}F(\alpha;\ell_j,\epsilon_j)^{\odot N_j}\subset\Sigma_m^{g_j}\quad(\forall j\ge1)$$

où $\odot$ signifie que l'on concatène les mots. Par construction, l'ensemble

$$K=\bigcap_{j\ge0}\bigcup_{w\in G_j}[w]$$

est inclus dans $E_\mu(\alpha)$. De plus, pour tout $j\ge0$ et $w\in G_j$, le cylindre $[w]$ contient exactement $n_{j+1}=f(\alpha;\ell_{j+1},\epsilon_{j+1})^{N_{j+1}}$ cylindres de la forme $[w']$ avec $w'\in G_{j+1}$, et le quotient des diamètres de $[w']$ et $[w]$ ne dépend que de $j+1$ et vaut $c_{j+1}=m^{-N_{j+1}\ell_{j+1}}$. Un lemme classique (voir par exemple l'exemple 4.6. de [**65**] ou bien [**80**]) donne alors

$$\dim K\ge\liminf_{j\to\infty}\frac{\log(n_1n_2\cdots n_j)}{-\log(c_1c_2\cdots c_{j+1}n_{j+1})}.$$

Le choix de la suite N_j impose à la limite inférieure précédente d'être égale à

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log(n_1 n_2 \cdots n_j)}{-\log(c_1 c_2 \cdots c_j)},$$

qui par construction est minorée par $f_\mu(\alpha) - \delta$. Donc $\dim E_\mu(\alpha) \geq f_\mu(\alpha) - \delta$ pour tout $\delta > 0$.

Remarque 7.1. — *On peut modifier légèrement la construction de l'ensemble de Cantor K en remplaçant δ par δ_j au cours des étapes de la construction de sorte que δ_j tende vers 0. Alors, on peut construire sur K une mesure borélienne dont la dimension inférieure est supérieure ou égale à $f_\mu(\alpha)$.*

Etape 4. Le formalisme est valide en tout $\alpha \in L$. Soit $\alpha \in L$. On vient de montrer que $\dim E_\mu(\alpha) \geq f(\alpha)$. Mais on sait aussi que $\dim E_\mu(\alpha) \leq f(\alpha)$ et $\tau_\mu^*(\alpha) = f(\alpha)$ puisque f est concave sur L. □

Démonstration du théorème 7.2. Notons $\mathcal{M}_\mu(\sigma)$ l'ensemble des mesures de probabilités invariantes sous σ dont le support est inclus dans celui de μ. L'application $L_\mu : \mathcal{M}_\mu(\sigma) \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_\mu(\nu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\int \log_m \mu([x|_n])\, \mathrm{d}\nu(x)$$

est continue. Comme $\mathcal{M}_\mu(\sigma)$ est convexe et compact, l'image de L_μ est un intervalle compact inclus dans $L = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ par construction.

- $L_\mu(\mathcal{M}_\mu(\sigma)) = L$.

Pour obtenir cette égalité, il suffit d'après ce qui précède de montrer que, pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\min} + \varepsilon]$ et $\beta \in [\alpha_{\max} - \varepsilon, \alpha_{\max}]$ tels que $\mathcal{F}_\mu(\alpha) \neq \emptyset \neq \mathcal{F}_\mu(\beta)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de L et de la mesure μ_ε donnée par la proposition 3.2, il existe x et x' tels que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\left|\alpha_{\min} - \frac{1}{n}\log \mu_\varepsilon([x|_n])\right| \leq 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\alpha_{\max} - \frac{1}{n}\log \mu_\varepsilon([x'|_n])\right| \leq 2\varepsilon.$$

Il existe donc $\alpha_\varepsilon \in [\alpha_{\min} - 3\varepsilon, \alpha_{\min} + 3\varepsilon]$ et $\beta_\varepsilon \in [\alpha_{\max} - 3\varepsilon, \alpha_{\max} + 3\varepsilon]$ tels que $\tau^*_{\mu_\varepsilon}(\alpha_\varepsilon)$ et $\tau^*_{\mu_\varepsilon}(\beta_\varepsilon)$ soient strictement positifs. Soit ν_α et ν_β les mesures ergodiques de type quasi-Bernoulli construites dans l'analyse multifractale du cas quasi-Bernoulli qui sont portées par $E_{\mu_\varepsilon}(\alpha_\varepsilon)$ et $E_{\mu_\varepsilon}(\beta_\varepsilon)$ respectivement. Posons

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\int \log_m \mu([x|_n])\, \mathrm{d}\nu_\alpha(x)$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\int \log_m \mu([x|_n])\, \mathrm{d}\nu_\beta(x).$$

Alors, par construction, on a $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\min} + 4\varepsilon]$, $\beta \in [\alpha_{\max} - 4\varepsilon, \alpha_{\max}]$ et $\mathcal{F}_\mu(\alpha) \neq \emptyset \neq \mathcal{F}_\mu(\beta)$.

• $\dim E_\mu(\alpha) \geq \frac{1}{\log m} \max_{\nu \in \mathcal{F}_\mu(\alpha)} h_\nu$ *pour* $\alpha \in L$.
Soit $\alpha \in L$. Puisque l'ensemble l'ensemble $\mathcal{F}_\mu(\alpha)$ est compact et l'entropie une fonction semi-continue supérieurement, le maximum $\max_{\nu \in \mathcal{F}_\mu(\alpha)} h_\nu$ est bien défini. Soit ν_0 une mesure qui réalise le maximum (notons que nécessairement $\mathrm{supp}(\nu_0) \subset \mathrm{supp}(\mu)$). Soit également une mesure invariante ν de support égal à $\mathrm{supp}(\mu)$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\nu_\varepsilon = (1-\varepsilon)\nu_0 + \varepsilon\nu$ et $\alpha_\varepsilon = L_\mu(\nu_\varepsilon)$. On a

$$|\alpha_\varepsilon - \alpha| \leq 2\varepsilon \max\{|\alpha| : \alpha \in L\}.$$

Comme $\mathrm{supp}(\nu_\varepsilon) = \mathrm{supp}(\mu)$ (et $\mathrm{supp}(\mu)$ a la structure d'un espace symbolique), d'après la proposition 3.3 il existe une suite $\nu_\varepsilon^{(k)}$ de mesures de Markov ergodiques qui convergent faiblement vers ν_ε et telle que $h_{\nu_\varepsilon^{(k)}}$ converge vers h_{ν_ε} quand k tend vers l'infini. Soit $\alpha_\varepsilon^{(k)} = L_\mu(\nu_\varepsilon^{(k)})$. On a $|\alpha_\varepsilon - \alpha_\varepsilon^{(k)}| \leq \varepsilon$ pour k assez grand. Comme le spectre des grandes dévations f_μ est semi-continu supérieurement (il est même continu), pour tout $\eta > 0$, pour ε assez petit et $k(\varepsilon)$ assez grand, on a donc

$$\dim E_\mu(\alpha) = f(\alpha) \geq f(\alpha_\varepsilon^{(k)}) - \eta.$$

De plus, la mesure $\nu_\varepsilon^{(k)}$ étant ergodique, on a $\nu_\varepsilon^{(k)}(E_\mu(\alpha_\varepsilon^{(k)})) = 1$ d'après le corollaire 3.1. Donc

$$f(\alpha_\varepsilon^{(k)}) = \dim E_\mu(\alpha_\varepsilon^{(k)}) \geq \dim \nu_\varepsilon^{(k)}.$$

Or, d'après le théorème de Shannon-McMillan-Breiman (théorème 5.12), on a $\dim \nu_\varepsilon^{(k)} = h_{\nu_\varepsilon^{(k)}} / \log m$. En faisant tendre k vers l'infini on obtient

$$f(\alpha) \geq \frac{h_{\nu_\varepsilon}}{\log m} - \eta = \frac{(1-\varepsilon)h_{\nu_0} + \varepsilon h_\nu}{\log m} - \eta$$

(où l'on a utilisé la linéarité de l'entropie). En faisant tendre ε puis η vers 0 on obtient l'inégalité cherchée.

• $\dim E_\mu(\alpha) \leq \frac{1}{\log m} \max_{\nu \in \mathcal{F}_\mu(\alpha)} h_\nu$ *pour* $\alpha \in L$.
Soit $\alpha \in L$ et $\varepsilon > 0$. Soit μ_ε comme dans la proposition 3.2. On a

$$E_\mu(\alpha) \subset \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{n \geq p} E(p, n, \varepsilon),$$

où

$$E(p, n, \varepsilon) = \big\{x : |\alpha - \log_m \mu_\varepsilon([x|_n])/n| \leq 2\varepsilon\big\}.$$

Or $\dim E(p, n, \varepsilon) \leq \max_{|\beta - \alpha| \leq 2\varepsilon} \tau_{\mu_\varepsilon}^*(\beta)$, et nous savons d'après la preuve du théorème 7.1 dans le cas quasi-Bernoulli que ce max est égal à la dimension d'une mesure ergodique ν_ε, ou encore à $h_{\nu_\varepsilon}/\log m$, cette mesure étant portée par supp(μ) et telle que $\nu_\varepsilon(E_{\mu_\varepsilon}(\beta)) = 1$ pour un certain $\beta \in [\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon]$. Avec les notations du paragraphe précédent, on a donc $L_{\mu_\varepsilon}(\nu_\varepsilon) = \beta$ et par construction $|L_\mu(\nu_\varepsilon) - L_{\mu_\varepsilon}(\nu_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ donc $|L_\mu(\nu_\varepsilon) - \alpha| \leq 3\varepsilon$.

Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\dim\, E_\mu(\alpha) \leq \sup_{\nu\in\mathcal{M}(\sigma):|L_\mu(\nu)-\alpha|\leq 3\varepsilon} h_\nu/\log m.$$

Comme $\{\nu \in \mathcal{M}(\sigma) : |L_\mu(\nu)-\alpha| \leq 3\varepsilon\}$ est compact et l'entropie semi-continue supérieurement, le sup précédent est atteint en une mesure m_ε. Alors, toute valeur d'adhérence faible m_0 de la suite $(m_{1/k})_{k\geq 1}$ est dans $\mathcal{F}_\mu(\alpha)$ et par construction $\dim\, E_\mu(\alpha) \leq h_{m_0}/\log m$. $\square$

7.2. Principe variationnel et raffinement. — Le principe variationnel (théorème 7.2) peut s'énoncer pour les moyennes de Birkhoff et se généraliser pour une grande classe de systèmes dynamiques. Ce principe variationnel peut également être raffiné.

Soit X un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue. Nous nous sommes intéressés au système dynamique topologique (X, T). Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach réel et $\mathbb{B}^*$ son espace dual, leur dualité étant notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Nous considérons $\mathbb{B}^*$ comme un espace localement convexe muni de sa topologie $*$-faible $\sigma(\mathbb{B}^*, \mathbb{B})$. Pour toute fonction continue $\Phi : X \to \mathbb{B}^*$, considérons ses moyennes de Birkhoff

$$A_n\Phi(x) = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{n-1}\Phi(T^j x) \qquad (n \geq 1).$$

Nous voudrions étudier le comportement asymptotique de $A_n\Phi(x)$ sous la topologie $\sigma(\mathbb{B}^*, \mathbb{B})$ pour différents points $x \in X$.

Fixons un sous-ensemble $E \subset \mathbb{B}$. Pour une suite $\{\xi_n\} \subset \mathbb{B}^*$ et un point $\xi \in \mathbb{B}^*$, nous désignons par $\limsup_{n\to\infty} \xi_n \overset{E}{\leq} \xi$ le fait

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \xi_n, w\rangle \leq \langle \xi, w\rangle, \qquad \forall w \in E.$$

La signification de $\limsup_{n\to\infty} \xi_n \overset{\mathbb{B}}{=} \xi$ est évidente. Il est aussi clair que $\limsup_{n\to\infty} \xi_n \overset{\mathbb{B}}{\leq} \xi$, ou de façon équivalente $\limsup_{n\to\infty} \xi_n \overset{\mathbb{B}}{=} \xi$ signifie que ξ_n converge vers ξ pour la topologie $\sigma(\mathbb{B}^*, \mathbb{B})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{B}^*$ et $E \subset B$. Notre objet d'étude est l'ensemble

$$X_\Phi(\alpha; E) = \left\{ x \in X : \limsup_{n\to\infty} A_n\Phi(x) \overset{E}{\leq} \alpha \right\}.$$

L'ensemble $X_\Phi(\alpha;\mathbb{B})$ sera simplement noté par $X_\Phi(\alpha)$. C'est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\lim_{n\to\infty} A_n\Phi(x) = \alpha$ pour la topologie $\sigma(\mathbb{B}^*,\mathbb{B})$. Si $\widehat{E}$ est le cône convexe engendré par E , alors $X_\Phi(\alpha,E) = X_\Phi(\alpha,\widehat{E})$. Pour cette raison, nous pouvons toujours supposer que E est un cône convexe. Observons que si E est symétrique (i.e. $E = -E$), nous avons

$$X_\Phi(\alpha,E) = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} A_n\Phi(x) \overset{E}{=} \alpha\right\}.$$

Nous définissons le spectre d'entropie par la fonction

$$\mathcal{E}_\Phi^E(\alpha) = h_{\mathrm{top}}(X_\Phi(\alpha;E))$$

où $h_{\mathrm{top}}(A)$ désigne l'entropie topologique d'un ensemble $A \subset X$ au sens de Bowen ([**37**], voir aussi [**38**]). Sur Σ_m^+, on a $h_{\mathrm{top}}(A) = \dim A \cdot \log m$. La description du spectre d'entropie fait intervenir les sous-ensembles de mesures invariantes

$$\mathcal{M}_\Phi(\alpha;E) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} : \int \Phi \mathrm{d}\mu \overset{E}{\leq} \alpha\right\}$$

où $\mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ est l'ensemble des probabilités T-invariantes,$\int \Phi\mathrm{d}\mu$ est une intégrale à valeurs vectorielles au sens de Pettis et l'inégalité "$\overset{E}{\leq}$" signifie

$$\int \langle\Phi,w\rangle \mathrm{d}\mu \leq \langle\alpha,w\rangle \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad w \in E.$$

On dit qu'un système dynamique (X,T) possède la propriété de spécification si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $m(\epsilon) \geq 1$ ayant la propriété que pour tout entier $k \geq 2$, tous points $x_1,\ldots,x_k$ dans X et tous entiers

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$$

vérifiant $a_i - b_{i-1} \geq m(\epsilon)(\forall 2 \leq i \leq k)$, il existe un point $y \in X$ tel que

$$d(T^{a_i+n}y, T^n x_i) < \epsilon \qquad (\forall\ 0 \leq n \leq b_i - a_i, \quad \forall 1 \leq i \leq k).$$

La spécification a été introduite par Bowen ([**37**]). Pour la classe des systèmes dynamiques ayant la propriété de spécification, nous avons le principe variationnel suivant.

***Théorème 7.3* ([87]).** — *Supposons que (X,T) est un système ayant la propriété de spécification. Alors*

(a) *Si $\mathcal{M}_\Phi(\alpha;E) = \emptyset$, on a $X_\Phi(\alpha,E) = \emptyset$.*

(b) *Si $\mathcal{M}_\Phi(\alpha;E) \neq \emptyset$, on a*

$$h_{\mathrm{top}}(X_\Phi(\alpha;E)) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_\Phi(\alpha;E)} h_\mu. \tag{71}$$

Lorsque $\mathbb{B}$ est un espace euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^d$ et $E = \mathbb{R}^d$, le principe variationnel (71) a été prouvé pour différents systèmes [**80, 81, 105, 214**]. Il y a d'autres travaux liés à ce sujet [**27, 28, 181, 182, 193, 216**].

Mais il faut signaler qu'il y a des systèmes, comme le système de Gauss des fractions continues, pour lesquels le principe variationnel n'est plus valable sous la même forme [**88**].

Revenons sur Σ_m^+ sur lequel on a $\dim A = \frac{1}{\log m} h_{\text{top}} A$ pour tout $A \subset \Sigma_m^+$. Soit $\Phi : \Sigma_m^+ \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $0 \le \beta < 1$, considérons

$$X_\Phi(\alpha; a, \beta) = \left\{ x \in \Sigma_m^+ \colon S_n\Phi(x) - n\alpha \sim a n^\beta \right\}$$

où $u_n \sim v_n$ signifie $u_n/v_n \to 1$ et, par convention, le cas $a = 0$ ou $\beta = 0$ signifie que $S_n\Phi(x) - n\alpha$ est bornée.

Théorème 7.4 **([89])**. — *Supposons que $\Phi : \Sigma_m^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction Höldérienne. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $0 \le \beta < 1$. Pour toute mesure de Gibbs μ_ψ associée à un potentiel höldérien ψ telle que $\int \Phi \, d\mu_\psi = \alpha$, on a*

$$\dim X_\Phi(\alpha; a, \beta) \ge \dim \mu_\psi \tag{72}$$

Par conséquent, on a la formule

$$\dim X_\Phi(\alpha; a, \beta) = \max \left\{ \dim \nu : \nu \text{ ergodique }, \int \Phi \, d\nu = \alpha \right\}. \tag{73}$$

Observons que les $X_\Phi(\alpha; a, \beta)$ avec différents choix de (a, β) constituent un ensemble non-dénombrable de morceaux de $X_\Phi(\alpha)$, qui ont la même dimension que $X_\Phi(\alpha)$.

Ce raffinement du principe variationnel permet d'effectuer une étude fine des fonctions de Weierstraß

$$W_\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\tau n} \sin 2^n x$$

$(0 < \tau \le 1)$, y compris la fonction de Hardy correspondant à $\tau = 1$ [**89**]. Les points x tels que $S_n\Phi(x) - n\alpha$ soient borné sont liés à la non-dérivabilité en géométrie du triangle [**52**].

7.3. Produits de Bernoulli de matrices positives. — Les résultats de la section 7.1 s'appliquent en particulier aux mesures associées comme dans la section 3.4.1 à des produits de Birkhoff de matrices strictement positives. Ils ne couvrent donc pas le cas de matrices seulement positives. Pourtant, l'exemple de produit de Bernoulli de matrices positives est important dans l'étude des mesures auto-similaires (voir par exemple la section 3.5.2 et [**102, 95, 217, 218, 100**]).

Supposons données m matrices positives $M_0, \ldots, M_{m-1}$. Pour $w \in \Sigma_m^*$, on note

$$P_w = M_{w_1} \ldots M_{w_{|w|}}.$$

On a le résultat suivant.

Théorème 7.5 **([102, 100])**. — *Supposons qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\sum_{k=1}^{r}(M_0 + \cdots M_{m-1})^r > 0$, i.e. $\sum_{i=0}^{m-1} M_i$ est irréductible. Alors (avec la convention $0^q = 0$)*

$$P(q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{w\in\Sigma_m^n} \|P_w\|^q$$

existe pour tout $q \in \mathbb{R}$. De plus, il existe une mesure ergodique μ telle que

$$\mu([w]) \approx \|P_w\| \exp(-|w|P(1)), \quad \forall\ w \in \Sigma^*,$$

et dim $E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ *en tout point α tel que $\tau_\mu^*(\alpha) \geq 0$. Enfin, $\tau_\mu(q) = (qP(1) - P(q))/\log m$ et τ_μ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Nous allons simplement indiquer le schéma des preuves de l'existence de μ, de la dérivabilité de τ_μ en $q > 0$ et enfin du fait que dim $E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ si $\alpha = \tau_\mu'(q)$ pour $q > 0$ (ces résultats sont établis dans [**102**] ; on consultera aussi avec bénéfice [**217**]). Le calcul de dim $E_\mu(\alpha)$ pour les autres α se ferait en raffinant l'approche développée dans la preuve du théorème 7.1 (voir [**100**]).

Dans toute la suite, étant données deux familles de fonctions positives $\{u_i\}_{i\in I}$ et $\{v_i\}_{i\in I}$, on écrira $u_i \approx v_i$ pour dire qu'il existe une constance $C > 0$ telle que $C^{-1}u_i \leq v_i \leq Cu_i$ pour tout $i \in I$.

Pour tout $q > 0$, posons $s_n(q) = \sum_{w\in\Sigma_m^n} \|P_w\|^q$. On montre que comme dans le cas où les matrices seraient strictement positives,

$$\sum_{v\in\Sigma_p} \|P_{w\cdot v}\|^q \approx \|P_w\| s_p(q), \quad \forall\ n, p \geq 1,\ w \in \Sigma_m^n$$

et donc

$$s_{n+p}(q) \approx s_n(q) s_p(q), \quad \forall\ n, p \geq 1$$

(on notera que contrairement au cas de matrices strictement positives, en général on n'a pas $\|P_{w\cdot v}\| \approx \|P_w\|\|P_v\|$). Par conséquent, il existe un unique nombre $P(q)$ tel que

$$\sum_{w\in\Sigma_m^n} \|P_w\|^q \approx \exp(nP(q)).$$

Pour $n \geq 1$, soit $\mu_{q,n}$ la mesure obtenue en répartissant uniformément la masse $\|P_w\|^q/s_n(q)$ sur chaque $[w]$. Soit ν_q une valeur d'adhérence de cette suite. On montre qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout w et v dans Σ^* et $i > |w|$, on ait

$$\sum_{k=1}^{2r} \nu_q\big([w] \cap \sigma^{-(i+k)}([v])\big) \geq C^{-1}\nu_q([w])\nu_q([v]) \tag{74}$$

$$\nu_q([w \cdot v]) \leq C\nu_q([w])\nu_q([v]). \tag{75}$$

Toute valeur d'adhérence μ_q de $N^{-1}\sum_{k=0}^{N} \nu_q \circ \sigma^{-k}$ est invariante et satisfait encore (74) et (75), avec une autre constante C. De plus, on peut déduire de (74) que μ_q est ergodique. Comme par construction de ν_q il existe une constante C telle que l'on ait

$$\mu_q([w]) \approx \|P_w\|^q \exp(-|w|P(q)), \tag{76}$$

l'ergodicité de μ_q impose que μ_q soit la seule mesure ergodique satisfaisant (76).

On prend donc $\mu = \mu_1$. On déduit de (76) que

$$\mu_q([w]) \approx \mu([w])^q m^{|w|\tau_\mu(q)}. \tag{77}$$

L'inégalité (75) satisfaite par μ_q et le théorème ergodique sous-multiplicatif de Kingman impliquent que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu_q([x_{|n}])}{-n \log m}$ existe μ_q-presque partout. Par conséquent, d'après le théorème 5.16, $\tau'_{\mu_q}(1)$ existe. Or (77) implique $\tau_{\mu_q}(r) = \tau_\mu(qr) - r\tau_\mu(q)$ pour tous q, $r > 0$, et on obtient la dérivabilité de τ_μ en tout $q > 0$ comme dans le cas où μ est quasi-Bernoulli.

Enfin, l'inégalité $\mu_q([w]) \leq C\mu([w])^q m^{|w|\tau_\mu(q)}$ donne la validité du formalisme multifractal en $\alpha = P'(q)$ si $q > 0$.

7.4. Mesures quasi-Bernoulli sur l'espace symbolique auto-affine. — Nous examinons maintenant la situation dans laquelle l'espace sympolique est muni d'une métrique adaptée au codage d'un tapis de Sierpinski auto-affine par cet espace, et donc à l'étude des projections de mesures de Gibbs sur ces tapis qui seront définis dans la section 7.5.3. L'étude est plus délicate que dans la section précédente qui correspond au cas auto-similaire. Nous ne traiterons que le cas des mesures quasi-Bernoulli. Le cas des mesures presque multiplicatives générales est beaucoup plus difficile et traité dans [**12**] ; il repose sur l'introduction d'un formalisme thermodynamique à poids.

On se donne deux entiers m_1 et m_2 supérieurs ou égaux à 2, et on identifie $\Sigma^+_{m_1 m_2}$ et $\Sigma^+_{m_1} \times \Sigma^+_{m_2}$. On suppose $m_1 \leq m_2$ et on pose

$$s = \frac{\log m_1}{\log m_2}.$$

Chaque ensemble $\Sigma^+_{m_i}$, $i \in \{1, 2\}$, est muni de la distance

$$d_i(z, z') = m_i^{-|z \wedge z'|},$$

et le produit $\Sigma^+_{m_1} \times \Sigma^+_{m_2}$ est muni de la distance produit

$$d\big((x, y), (x', y')\big) = \max\big(d_1(x, x'), d_2(y, y')\big).$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des boules de rayon m_2^{-n} dans $(\Sigma^+_{m_1} \times \Sigma^+_{m_2}, d)$. Soit $g(n)$ le plus petit entier p tel que $m_1^{-p} \leq m_2^{-n}$. On a

$$\mathcal{F}_n = \left\{ [w_1 \cdot \widetilde{w}_1] \times [w_2] : (w_1, \widetilde{w}_1, w_2) \in \Sigma^n_{m_1} \times \Sigma^{g(n)-n}_{m_1} \times \Sigma^n_{m_2} \right\}. \tag{78}$$

Si $z \in \Sigma^+_{m_1} \times \Sigma^+_{m_2}$ et $n \geq 0$, on note $B_n(z)$ l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ contenant z. On a $B_n(z) = B(z, m_2^{-n})$.

On se donne une mesure μ non nulle de type quasi-Bernoulli sur $\Sigma^+_{m_1} \times \Sigma^+_{m_2}$.

Pour $q \in \mathbb{R}$ on définit sur les cylindres de $\Sigma^+_{m_1}$ l'application

$$I_{\mu,q}([w_1]) = \sum_{w_2 \in \Sigma^{|w_1|}_{m_2}} \mu([w_1] \times [w_2]))^q,$$

et on vérifie aisément qu'elle satisfait elle-même une propriété de type quasi-Bernoulli. Ceci permet de définir

$$\beta_\mu(q) = -\frac{1}{\log m} \cdot P\big(q(1-s) \log I_{\mu,1} + s \log I_{\mu,q}\big).$$

Notons $\pi_1^* \mu$ la projection de μ sur $\Sigma^+_{m_1}$, et définissons pour $q \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{\tau}_\mu(q) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_{m_2} \sum_{(w_1, w_2) \in \Sigma^n_{m_1} \times \Sigma^n_{m_2}} \mu([w_1] \times [w_2])^q.$$

Alors, on a pour tout $q \in \mathbb{R}$

$$\tau_\mu(q) = \widetilde{\tau}_\mu(q) + (1-s)\tau_{\pi_1^* \mu}(q), \tag{79}$$

et il résulte d'une inégalité de convexité (voir [**16**]), que

$$\beta_\mu(q) \geq \tau_\mu(q),$$

l'inégalité étant stricte en dehors du point 1 en général si $m_1 < m_2$, tandis que si $m_1 = m_2$, on a clairement $\beta_\mu(q) = \tau_\mu(q)$. On peut aussi montrer simplement en utilisant les définitions que l'on a

$$B_\mu = \tau_\mu$$

(on peut aussi consulter [**186**] qui traite le cas des mesures produits de Bernoulli). De plus, la fonction τ_μ est la somme de deux fonctions de partitions τ (voir (79)) associées à des mesures quasi-Bernoulli, donc elle est dérivable d'après le théorème 7.1.

Le résultat suivant (exception faite de l'étude du spectre multifractal aux bornes de son support) est prouvé dans [**149, 186**] pour les mesures produits de Bernoulli et dans [**16, 17**] pour une mesure quasi-Bernoulli en général. Sa preuve combine les techniques introduites dans [**171**] pour le calcul de la dimension de Hausdorff des tapis de Sierpinski auto-affines et certains éléments de l'analyse multifractale dans le cas auto-similaire. Il est aussi important de souligner que pour étudier le cas d'une mesure de Gibbs associée à un potentiel höldérien général, on doit introduire des mesures auxiliaires de type quasi-Bernoulli construites en suivant le modèle général décrit dans la section 3.4.2, et qui ne sont donc plus a priori des mesures de Gibbs, alors que dans le cas des mesures produits de Bernoulli, ces mesures auxiliaires sont encore de ce type. Ces mesures quasi-Bernoulli représentent des états d'équilibre dans le formalisme thermodynamique à poids étudié dans [**12**].

Théorème 7.6. — *Soit μ une mesure quasi-Bernoulli sur $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}$. Alors*
(1) $b_\mu = \beta_\mu$ *et* b_μ *est dérivable ;*
(2) $\dim \operatorname{supp}(\mu) = -\beta_\mu(0)$ *;*
(3) $\dim E_\mu(\alpha) = b_\mu^*(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \geq 0$ *tel que* $b_\mu^*(\alpha) \geq 0$.

Notons que le résultat $\dim \operatorname{supp}(\mu) = -\beta_\mu(0)$ correspond au calcul fait dans [**171**] de la dimension de Hausdorff du tapis de Sierpinski naturellement codé par le support de μ (cf. section 7.5.3).

On s'intéresse aussi naturellement au spectre multifractal associé au comportement de la mesure μ sur les cylindres, qui rappelons-le ne sont plus ici les boules quand $m_1 < m_2$. On regarde donc, comme dans le cas auto-similaire, les ensembles

$$E_\varkappa(\alpha) = \left\{(x,y) \in \operatorname{supp}(\mu) : \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{m_2} \mu([x|_n] \times [y|_n])}{-n} = \alpha\right\}, \quad (\alpha \geq 0).$$

Soit $\varkappa\big((x,y), m_2^{-n}\big) = \log \mu([x|_n] \times [y|_n])$. Pour $q \in \mathbb{R}$ définissons

$$\beta_\varkappa(q) = -P\big(s \log_{m_1} I_{\mu,q}\big).$$

On a un énoncé identique au précédent.

Théorème 7.7. — [**17**] *Soit μ une mesure quasi-Bernoulli sur $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}$. Alors*

(1) $b_{\varkappa} = \beta_{\varkappa}$ *et* $b_{\varkappa}$ *est dérivable ;*

(2) $\dim E_{\varkappa}(\alpha) = b^*_{\varkappa}(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \geq 0$ *tel que* $b^*_{\varkappa}(\alpha) \geq 0$.

Démonstration des théorèmes 7.6 et 7.7.

• *Mesures auxiliaires.* Nous adoptons la convention $0^q = 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. Alors, pour $q \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ et $(w_1, w_2) \in \Sigma^n_{m_1} \times \Sigma^n_{m_2}$ soit

$$\begin{cases} \theta_q([w_1]) = r_1^{n\beta_\mu(q)} I_{\mu,1}([w_1])^{q(1-s)} I_{\mu,q}([w_1])^s \\ \widetilde{\theta}_q([w_1]) = r_1^{n\beta_\varkappa(q)} I_{\mu,q}([w_1])^s \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \psi_q([w_1] \times [w_2]) = \theta_q([w_1]) \dfrac{\mu([w_1] \times [w_2])^q}{I_{\mu,q}([w_1])} \\ \widetilde{\psi}_q([w_1] \times [w_2]) = \widetilde{\theta}_q([w_1]) \dfrac{\mu([w_1] \times [w_2])^q}{I_{\mu,q}([w_1])} \end{cases}.$$

Les fonctions ψ_q et $\widetilde{\psi}_q$ sont par construction presque multiplicatives, de pression topologique nulle et respectivement fortement équivalentes aux restrictions à $\mathcal{C}_{m_1} \times \mathcal{C}_{m_2}$ de deux mesures ergodiques quasi-Bernoulli μ_q et $\widetilde{\mu}_q$ de même support que μ.

On a les propriétés fondamentales suivantes qu'il convient de comparer avec (66) dans le cas auto-similaire.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathrm{supp}(\mu)$ et $n \geq 1$, soit

$$u_n(x) = \frac{I_{\mu,1}([x|_n])^q}{I_{\mu,q}([x|_n])}, \qquad \widetilde{u}_n(x) = \frac{1}{I_{\mu,q}([x|_n])}.$$

Proposition 7.1. — [**17**] *On a*

1. $\dfrac{\mu_q\big(B_n(x,y)\big)}{\mu\big(B_n(x,y)\big)^q m_2^{n\beta_\mu(q)}} \approx \dfrac{u_n(x)}{u_{g(n)}(x)^s}, \ (x,y) \in \mathrm{supp}(\mu), \ n \geq 1;$
2. $\dfrac{\widetilde{\mu}_q\big(B_n(x,y)\big)}{\mu([x|_n] \times [y|_n])^q r_2^{n\beta_\varkappa(q)}} \approx \dfrac{\widetilde{u}_n(x)}{\widetilde{u}_{g(n)}(x)^s}, \ (x,y) \in \mathrm{supp}(\psi), \ n \geq 1$

• *Dérivabilité de β_μ et $\beta_\varkappa$.* On a fait observer au début de cette section que $\beta_\mu \geq \tau_\mu$ et τ_μ est dérivable. Comme les fonctions β_μ et τ_μ sont concaves et que par construction $\beta_\mu(1) = \tau_\mu(1) = 0$, il s'ensuit que $\beta'_\mu(1)$ existe et est égal à $\tau'_\mu(1)$.

Le lecteur patient peut alors vérifier la proposition suivante.

Proposition 7.2. — [**17**] *Pour tout* $(q,r) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

1. $\beta_{\mu_q}(r) = \beta_\mu(qr) - r\beta_\mu(q)$.
2. $\beta_{\widetilde{\mu}_q}(r) = \beta_\varkappa(qr) - r\beta_\varkappa(q)$.

Alors, on conclut comme pour la dérivabilité de τ_μ dans le cas auto-similaire.

• $\beta_\mu \le b_\mu$ *et* $\beta_\varkappa \le b_\varkappa$.
Nous utilisons les notations de la proposition 7.1. Pour tout $(x,y) \in \operatorname{supp}(\mu)$, par construction on sait qu'il existe $0 < a < b < \infty$ tels que l'on ait

$$a \le u_n(x)^{1/n} \le b \quad (\forall n \ge 1).$$

Etant donnée la définition de $g(n)$, il s'ensuit nécessairement que

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n(x)/u_{g(n)}(x)^s)^{1/n} \ge 1.$$

De même pour

$$\limsup_{n\to\infty} (\widetilde{u}_n(x)/\widetilde{u}_{g(n)}(x)^s)^{1/n} \ge 1.$$

La proposition 7.1 et les définitions de b_μ et $b_\varkappa$ impliquent alors le résultat. Comme $\dim \operatorname{supp}(\mu) \le -b_\mu(0)$, on a également la borne supérieure souhaitée pour $\dim \operatorname{supp}(\mu)$.

• $\dim E_\mu(\beta'_\mu(q)) \ge \beta^*_\mu(\beta'_\mu(q))$ *et* $\dim E_\varkappa(\beta'_\varkappa(q)) \ge \beta^*_\varkappa(\beta'_\varkappa(q))$ *pour tout* $q \in \mathbb{R}$.
En appliquant le théorème ergodique de Kingman [**150**] à la suite $\log u_n(x)$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{\mu_q\big(B_n(x,y)\big)}{\mu\big(B_n(x,y)\big)^q m_2^{n\beta_\mu(q)}}\Big)^{1/n} \le 1 \text{ pour } \mu_q\text{-presque tout } (x,y)$$

et un résultat analogue pour $\varkappa$. Le résultat provient alors d'un argument semblable à celui conduisant au lemme 6.1. La borne inférieure pour $\dim \operatorname{supp}(\mu)$ est fournie par l'inégalité

$$\dim E_\mu(\beta'_\mu(0)) \ge \beta^*_\mu(\beta'_\mu(0)) = -\beta_\mu(0).$$

Les deux points précédents combinés aux inégalités $\dim E_\mu(\alpha) \le b^*_\mu(\alpha)$ et $\dim E_\varkappa(\alpha) \le b^*_\varkappa(\alpha)$, valables pour tout α (proposition 6.2), donnent les égalités $b_\mu = \beta_\mu$ et $b_\varkappa = \beta_\varkappa$ ainsi que les dimensions des ensembles $E_\mu(\alpha)$ et $E_\varkappa(\alpha)$ pour α de la forme $\beta'_\mu(q)$ et $\beta'_\varkappa(q)$ respectivement.

Il reste le cas des exposants extrémaux. La preuve étant assez longue et fastidieuse, nous donnons juste une idée de la façon de procéder dans le cas de l'analyse multifractale de μ, le cas de $\varkappa$ se traitant de façon similaire. Examinons par exemple

$$\alpha_{\min} = \lim_{q\to\infty} \beta'_\mu(q).$$

Il suffit de construire une mesure μ_∞ chargeant $E_\mu(\alpha)$ et de dimension inférieure au moins égale à

$$\beta^*_\mu(\alpha_{\min}) = \lim_{q\to\infty} \beta^*_\mu\big(\beta'_\mu(q)\big) = \beta'_\mu(q)q - \beta_\mu(q).$$

On peut tenter la construction d'un ensemble de Cantor de type Moran comme dans le cas auto-similaire, mais cette idée n'aboutit pas. Plutôt que de concaténer des mots, l'idée consiste à concaténer des mesures de type μ_{q_n} pour une suite $(q_n)_{n\geq 1}$ tendant vers l'infini. Etant données une telle suite et une suite d'entiers $(p_n)_{n\geq 1}$, on note ν_n la restriction de μ_{q_n} à $\mathcal{C}^{p_n}_{m_1} \times \mathcal{C}^{p_n}_{m_2}$. On considère alors sur $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_1}$ la mesure $\mu_\infty = \otimes_{n=1}^\infty \nu_n$. On peut choisir la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ pour que la mesure ainsi obtenue convienne (voir [**12**]). □

7.5. Réalisations géométriques.—

7.5.1. Projections canoniques des mesures presque multiplicatives sur des grilles régulières de l'intervalle $[0,1]$. — Une mesure presque multiplicative μ sur Σ^+_m se projette naturellement sur la grille m-adique de $[0,1]$, ou sur la grille $\widetilde{m}$-adique de $[0,1]^d$ si $m = \widetilde{m}^d$. On montre alors dans [**9, 106**] que le formalisme multifractal associé aux boules centrées est également valable pour la mesure projetée ν en tout α tel que $\tau^*_\mu(\alpha) \geq 0$. Cela tient essentiellement au fait suivant. Si $\alpha \geq 0$ est tel que $\tau^*_\mu(\alpha) \geq 0$, on peut construire la mesure μ_α évoquée plus haut de sorte que pour μ_α-presque tout x, pour n grand, la ν_α-mesure de $I_n(\pi(x))$ (l'intervalle m-adique de génération n contenant x) est comparable à celle de ses intervalles m-adiques voisins de même génération, de sorte que la mesure de $\nu(B(\pi(x), m^{-n}))$ se comporte elle aussi comme $m^{-n\alpha}$.

Revenons sur l'exemple de la $(2,3)$-convolution de Bernoulli définie dans la section 3.5.2.

Théorème 7.8. — *Soit ν la $(2,3)$-convolution de Bernoulli. Alors*

(1) dim $E_\nu(\alpha) = \tau^*_\nu(\alpha)$ *pour tout α tel que $\tau^*_\nu(\alpha) \geq 0$;*

(2) τ_μ *est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et il existe $q_c < 0$ tel que $\tau_\nu(q) = q\log_2 3$ pour tout $q \leq q_c$ et τ_ν n'est pas dérivable en q_c.*

Le cas de la convolution de Bernoulli $\widetilde{\nu}$ associée au nombre d'or $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est à dire de la mesure obtenue comme loi de la variable aléatoire

$$\frac{\beta - 1}{\beta} \sum_{n \geq 0} \epsilon_n \beta^{-n}$$

où les ϵ_n sont i.i.d. et prennent les valeurs 0 et 1 avec équiprobabilité, est également traité dans [**106**] en montrant une relation de type (24) avec la projetée naturelle, cette fois sur une grille distordue, d'une mesure de Gibbs au sens faible sur Σ_3. La fonction $\tau_{\widetilde{\nu}}$ elle aussi se linéarise au voisinage de $-\infty$ et n'est pas dérivable au point critique où elle devient linéaire [**106**]. Ceci montre que les mesures ν et $\widetilde{\nu}$ ne peuvent être de type quasi-Bernoulli pour aucun codage par un espace symbolique sur un alphabet fini. Une étude a été entreprise dans [**93**] pour l'absolue continuité de la loi de probabilité de la série géométrique ci-dessus lorsque (ϵ_n) est une chaîne de Markov au lieu d'une suite de Bernoulli.

Une étude systématique des propriétés multifractales des convolutions de Bernoulli associées aux nombres de Pisot racines des polynômes de la forme $x^k - x^{k-1} - \cdots - 1$ ($k \geq 2$) est faite dans [**98**], où l'on trouve une discussion complète des propriétés de dérivabilité de la fonction τ pour ces mesures. En particulier, le L^q-spectre est C^∞ quand $k \geq 3$.

La partie du théorème 7.8 portant sur la validité du formalisme multifractal est une conséquence du théorème 7.1 et de la propriété vue à la section 3.5.2 que ν est liée par la relation (24) à la projection sur la grille dyadique d'une mesure de Gibbs au sens faible sur Σ_2. Le fait que la fonction τ_ν soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ provient de (24) et du théorème 7.5. Le fait que τ_ν soit non dérivable au point où elle se linéarise se montre en utilisant la même méthode que pour prouver la propriété analogue pour la convolution de Bernoulli associée au nombre d'or (voir [**106**]).

Nous établissons le fait que τ_ν est linéaire au voisinage de $-\infty$. On a clairement $\tau_\nu = \tau_\mu$, où μ est la mesure invariante introduite dans la section 3.5.2. On a vu à la fin de la section 3.5.2 que μ est une mesure de Gibbs au sens faible associée au potentiel ϕ et que $P(\phi) = 0$. Donc $\tau_\mu(q) = -P(q\phi)/\log 2$ pour tout $q \in \mathbb{R}$.

Appliquons le principe variationnel (44) à $q\phi$ et à la mesure invariante $\delta_{\overline{0}}$. On a $P(q\phi) \geq q\phi(\overline{0}) + h_{\delta_0} = -q \log 3$, donc $\tau_\mu(q) \leq q \log 3/\log 2$.

Il reste à prouver que $\tau_\mu(q) \geq q \log 3/\log 2$ au voisinage de $-\infty$.

Avec les notations de la section 3.5.2, pour tout $n \geq 1$ et $q < 0$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\Sigma_2^+} \mu([w])^q &= 2^{-q}3^{-nq} \sum_{w\in\Sigma_2^+} ({}^tVP_wV)^q \\ &= 2^{-q}3^{-nq}\cdot 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{a_1+\cdots+a_k=n, a_i>0} ({}^tVQ_{a_1}\cdots Q_{a_k}V)^q \\ &\leq 2^{1-q}3^{-nq}\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_1,\ldots,a_k>0} ({}^tVQ_{a_1}\cdots Q_{a_k}V)^q.\end{aligned}$$

On montre par récurrence sur k ([**106**], Lemma 2.6) que

$${}^tVQ_{a_1}\cdots Q_{a_k}V \geq \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i+\beta^2}{\beta^2}\right),$$

avec $\beta = (1+\sqrt{5})/2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\Sigma_2^+} \mu([w])^q &\leq 2^{1-q}3^{-nq}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a_1,\ldots,a_k>0}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i+\beta^2}{\beta^2}\right)^q \\ &\leq 2^{1-q}3^{-nq}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\beta^2}{\beta^2}\right)^q\right)^k.\end{aligned}$$

Soit $\widetilde{q} = \sup\left\{q : \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\beta^2}{\beta^2}\right)^q\right)^k < \infty\right\}$. Par définition de τ_μ, si $q < q_0$, on a $\tau_\mu(q) \geq q\log 3/\log 2$ si $q < \widetilde{q}$. De plus, comme τ_μ est continue et $\tau_\mu(0) = -1$, on a $\widetilde{q} \leq \sup\{q : \tau_\mu(q) = q\log 3/\log 2\} < 0$.

7.5.2. Mesure de Gibbs sur le cookie-cutter et son inverse. — Nous revenons à l'exemple de mesure de Gibbs sur un répulseur conforme K introduit dans la section 3.5.1. L'analyse multifractale de la mesure μ_φ est faite dans [**203**]. Nous supposerons sans perte de généralité que $P(\varphi\circ\pi^{-1}) = 0$.

Théorème 7.9. — *Pour tout $q \in \mathbb{R}$, $\tau_{\mu_\varphi}(q)$ est l'unique réel t tel que la pression topologique de $q\varphi + t\log|T'|$ soit nulle. La fonction τ_{μ_φ} est analytique, et le formalisme multifractal est valide en tout point où $\tau_{\mu_\varphi}^*$ est positive.*

Il est naturel de considérer la mesure discrète ν_φ obtenue comme l'inverse de μ_φ par la formule

$$\nu_\varphi([0,x]) = \sup\{t\in[0,1] : \mu_\varphi([0,t]) \leq x\}.$$

Du fait du caractère purement discontinu de ν_φ, son analyse multifractale nécessite l'introduction de résultats dits d'ubiquité hétérogène, dans les détails desquels nous ne rentrerons pas. Le lecteur intéressé pourra consulter [**20**], [**21**] et [**22**]. Nous donnons juste le résultat obtenu dans [**23**] pour ν_φ.

On considère dans l'énoncé suivant les ensembles

$$E_{\nu_\varphi}(\alpha) = \Big\{ t \in [0,1] : \liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu_\varphi(B(t,r))}{\log r} = \alpha \Big\}.$$

Théorème 7.10. — *Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on a $\tau_{\nu_\varphi}(q) = \min\big(-\tau_{\mu_\varphi}^{-1}(-q), 0\big)$. En particulier, on a $\tau_{\mu_\varphi}(q) = 0$ si et seulement si $q \geq \dim K$. On a $\dim E_{\nu_\varphi}(\alpha) = \tau_{\nu_\varphi}^*(\alpha)$ si $\tau_{\nu_\varphi}^*(\alpha) \geq 0$ et $E_{\nu_\varphi}(\alpha) = \emptyset$ sinon.*

7.5.3. Mesures de Gibbs sur les tapis de Sierpinski auto-affines. — Avec les notations de la section 7.5.3, étant donnée une partie S de $\{0, \dots, m_1 - 1\} \times \{0, \dots, m_2 - 1\}$ de cardinal au moins 2 pour éviter les cas triviaux, le tapis de Sierpinski associé à S dans $[0,1]^2$ est l'attracteur K associé à $\mathbf{S} = \{(x,y) \mapsto (x/m_1 x + s_1/m_1, x/m_2 + s_2/m_2) : (s_1, s_2) \in S\}$ comme dans la section 3.5.1. Etant donnée une mesure presque multiplicative μ de support $\bigcap_{n\geq 0} \sigma^{-n}([S])$ dans $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}$, se pose la question de la validité du théorème 7.6 pour la mesure $\widetilde{\mu}$ obtenue comme l'image sur K d'une mesure quasi-Bernoulli μ de support $\bigcap_{n\geq 0} \sigma^{-n}([S])$ dans $\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}$ par l'application $\pi_{\mathbf{S}}$. Jusqu'ici, on contrôle finement le comportement local de μ sur certaines boules de l'espace symbolique analysé par les mesures μ_q ; ces boules se projettent dans le plan sur des "presque" carrés dont on contrôle bien le comportement de la $\widetilde{\mu}$-masse. L'extension à $\widetilde{\mu}$ du théorème est possible si l'on est capable de contrôler aussi la $\widetilde{\mu}$-masse des huit voisins de même génération d'un tel presque carré. Pour pouvoir le faire, on ne peut jusqu'ici pas se passer de faire des hypothèses supplémentaires. Nous définissons

$S_1 = \{s_1 : (s_1, s_2) \in S\}$, $S_2 = \{s_2 : (s_1, s_2) \in S\}$ et introduisons trois propriétés, **(P1)**, **(P2)** et **(P3)**.

(P1) $|s_1 - s_1'| \geq 2$ pour toute paire $\{s_1, s_1'\}$ d'éléments distincts de S_1.

(P2) $\{0, m_1 - 1\} \cap (\{0, \dots, m_1 - 1\} \setminus S_1) \neq \emptyset$.

(P3) $\{0, m_1 - 1\} \subset S_1$ et pour tout $q > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log I_{\mu,q}([0^n]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log I_{\mu,q}([(r_1 - 1)^n]),$$

où pour $j \in \{0, m_1 - 1\}$ et $n \geq 1$, j^n est le mot de longueur n dont toutes les lettres sont égales à j.

Le résultat suivant est obtenu dans [**16, 17**]. Il fait suite à une version plus faible obtenue dans [**149**] et [**186**] quand μ est une mesure de Bernoulli et sous l'hypothèse de séparation géométrique très forte que non seulement **(P1)** est satisfaite, mais que si $s_1 \in S_1$, alors on a nécessairement $|s_2 - s_2'| \geq 2$ si (s_1, s_2) et (s_1, s_2') sont dans S et distincts. Cette hypothèse élimine complètement la discussion sur le contrôle des presque carrés voisins évoquée plus haut. En fait il suffit de supposer **(P1)** vérifiée pour éliminer cette discussion.

La propriété **(P2)** assure qu'une des bandes $[0, 1/m_1] \times [0, 1]$ et $[1-1/m_1, 1] \times [0, 1]$ ne rencontre pas le support de $\widetilde{\mu}$ et **(P3)** assure que, si les deux bandes rencontrent ce support, il doit y avoir de la périodicité dans la distribution de $\widetilde{\mu}$. Par exemple quand $\widetilde{\mu}$ est une mesure de Bernoulli associée à un vecteur de probabilité $(p_s)_{s\in S}$, alors **(P3)** a lieu si on a $p_{(0,s_2)} = p_{(m_1-1,s_2)}$ pour tout $s \in S$ de la forme $(0, s_2)$.

Théorème 7.11. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus, on a*

(1) $\dim E_{\widetilde{\mu}}(\alpha) \geq \beta_\psi^*(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\beta_\mu^*(\alpha) \geq 0$ *;*

(2) $\dim E_{\widetilde{\mu}}(\alpha) \leq \beta_\mu^*(\alpha)$ *si* $\alpha \geq \beta_\mu'(0)$ *, et* $E_{\widetilde{\mu}}(\alpha) = \emptyset$ *si* $\beta_\mu^*(\alpha) < 0$ *;*

(3) *Supposons que l'une des propriétés* **(P1)**, **(P2)** *ou* **(P3)** *soit satisfaite. On a* $\dim E_{\widetilde{\mu}}(\alpha) \leq \beta_\mu^*(\alpha)$ *si* $0 \leq \alpha < \beta_\mu'(0)$, *et* $E_{\widetilde{\mu}}(\alpha) = \emptyset$ *si* $\beta_\mu^*(\alpha) < 0$. *De plus,* $b_{\widetilde{\mu}} = \beta_\mu$.

Le lecteur trouvera des résultats supplémentaires sur l'analyse multifractale sur des attracteurs d'IFS auto-affines dans [**64, 129**]. Fixons $N \geq 2$ applications linéaires contractantes inversibles de $\mathbb{R}^d$ $A_1, \ldots, A_N$ et considérons les attracteurs $K(t_1, \ldots, t_N)$ de tous les IFS de la forme $\mathbf{S}(t_1, \ldots, t_N) = \{t_i + A_i : 1 \leq i \leq N\}$ avec $t_i \in \mathbb{R}^d$. Dans [**64**], on calcule pour $1 \leq q \leq 2$ le L^q-spectre de la projection d'une mesure de Gibbs définie sur Σ_N^+ sur presque tout les $K(t_1, \ldots, t_N)$ au sens de la mesure de Lebesgue Nd-dimensionnelle. Dans [**129**], on fait pour presque tout les $K(t_1, \ldots, t_N)$ l'analyse multifractale du comportement asymptotique des moyennes de Birkhoff d'un potentiel Höldérien sur Σ_N^+ projetées sur $K(t_1, \ldots, t_N)$. Ces résultats, très fortement basées sur [**61**], sont qualitativement assez différents de ceux obtenus ici.

7.5.4. Résultats généraux pour les mesures auto-similaires et auto-conformes. —

Mesures auto-similaires ; (OSC), type fini, et séparation faible. — L'analyse multifractale des mesures auto-similaires (voir la section 3.5.1 pour leur définition) a fait l'objet de nombreux travaux. Lorsque la condition (OSC) est satisfaite par le système de fonctions itérées, un résultat général a été obtenu dans [**1**]. En l'absence de la condition (OSC), un résultat général a d'abord été obtenu dans [**96**] en dimension 1 lorsque le système de fonctions itérées satisfait la condition de type fini (voir section 3.5.2). Puis, ce résultat a été étendu en toute dimension aux systèmes satisfaisant une propriété plus faible encore, dite de *séparation faible* et introduite dans [**153**], que nous présentons maintenant :

Le système $\mathbf{S} = \{S_0, \dots S_{N-1}\}$ est dit satisfaire la propriété de séparation faible (WSC) si

$$\ell = \sup_{x\in\mathbb{R}^d, 0<r\leq 1} \ell(U(x,r)) < \infty,$$

où $U(x,r)$ est la boule euclidienne ouverte de centre x et de rayon r et

$$\ell(U(x,r)) = \#\Big\{u \in \Sigma_N^* : \|S_u\| < r \leq \|S_{u_{|u|-1}}\| \text{ et } S_u(K) \cap U(x,r) \neq \emptyset\Big\}.$$

Autrement dit, il existe un nombre entier m tel que pour toute boule $U(x,r)$ non réduite à son centre et de rayon inférieur à 1, le nombre de copies de K de la forme $S_u(K)$ et de diamètre comparable à $\operatorname{diam} K$ est majoré par m.

Nous regroupons les résultats que nous venons d'évoquer dans les énoncés suivants, où la mesure ν considérée est celle définie par (21). Notons $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ l'intervalle $\{\alpha : \tau_\nu^*(\alpha) \geq 0\}$. Nous dirons qu'une mesure borélienne positive μ satisfait le formalisme multifractal si $\dim E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

Théorème 7.12 **([1, 190])**. — *Supposons que* $\mathbf{S}$ *satisfasse la condition (OSC). Alors, la mesure* ν *satisfait le formalisme multifractal. De plus, la fonction* $\tau_\nu(q)$ *est analytique et c'est l'unique solution de l'équation :*

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_k^q \|S_k\|^{-t} = 1.$$

En fait, le cas $\alpha \in \{\alpha_{\min}, \alpha_{\max}\}$ n'est pas traité dans [**1**].

Théorème 7.13 **([95, 100])**. — *Supposons que* $d = 1$ *et que* $\mathbf{S}$ *satisfasse la condition de type fini. Alors, il existe une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés* I_j *dont les intérieurs sont disjoints, tels que* $\nu(\bigcup_j I_j) = 1$, *et pour tout* j *la mesure* $\nu_{|I_j}$ *satisfait le formalisme multifractal. De plus, la fonction* $\tau_{\nu_{|I_j}}$ *ne dépend pas de* j, *et est égale à* τ_ν *sur* $\mathbb{R}_+$. *Par conséquent, on a aussi* $\dim E_\nu(\alpha) = \tau_\nu^*(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in [\alpha_{\min}, \tau_\nu'(0^-)]$. *Enfin, la fonction* τ_ν *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Les exemples de la $(2,3)$-convolution de Bernoulli et de la convolution de Bernoulli associée au nombre d'or considérés plus haut montrent que le formalisme multifractal peut être pleinement satisfait par des mesures autosimilaires associées à des IFS satisfaisant la condition de type fini.

Le résultat sur la dérivabilité de τ_ν sur $\mathbb{R}_+^*$ et la validité du formalisme (associé aux boîtes m-adiques) en $\alpha = \tau'_\nu(q)$ pour $q > 0$ sont également établis pour une classe spéciale de mesures auto-similaires satisfaisant la propriété de type finie dans [**217**].

Le fait que l'on ne sache pas conclure en général pour la mesure ν quand $\alpha \in (\tau'_\nu(0^-), \alpha_{\max}]$ est dans la nature des choses comme le montrent des exemples étudiés dans [**155, 104, 210, 217, 218**]. Par exemple, si μ désigne la mesure uniforme sur l'ensemble de Cantor, alors $\nu = \mu * \mu * \mu$ satisfait (21) avec $N = 4$, $S_k(x) = \frac{1}{3}(x + 2k)$ pour $0 \leq k \leq 3$, et $\mathbf{p} = (1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$, et le spectre multifractal de ν n'est pas strictement concave à droite de $\tau'_\nu(0^-)$. Il est constitué d'une partie strictement concave et d'un point isolé.

Dans [**218**], on propose un procédé de construction de mesures auto-similaires satisfaisant la propriété de type finie et ayant un nombre fini arbitrairement grand de points $q < 0$ en lesquels τ_ν est non dérivable, et donnant lieu à autant d'intervalles sur lesquels le formalisme multifractal est violé. Voici comment procéder. Soit ℓ un nombre entier positif impair. Soit $\mathbf{p} = (p_0, \cdots, p_{3\ell-1})$ un vecteur de probabilité tel que $p_i > 0$ pour tout i et $p_i = p_{i+2\ell} + p_{2\ell-1-i}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$.

On considère le système $\mathbf{S}$ constitué de 3ℓ applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$S_i : x \mapsto \frac{x+i}{2\ell},\ S_{j+2\ell} : x \mapsto \frac{-x+i+1}{2\ell} \quad (0 \leq i \leq 2\ell - 1,\ 0 \leq j \leq \ell - 1)$$

et la mesure autosimilaire associée à $\mathbf{S}$ et $\mathbf{p}$: $\nu = \sum_{i=0}^{3\ell-1} p_i\, \nu \circ S_i^{-1}$. Soit $\tau_1(q) = -\log_{2\ell}\Big(\sum_{i=1}^{\ell} 2p_i^q\Big)$ et $\tau_2(q) = -\log_{2\ell}\Big(\sum_{i=\ell+1}^{2\ell} p_i^q\Big)$ $(q \in \mathbb{R})$. On a alors [**218**]

$$\tau_\nu = \min(\tau_1, \tau_2) \text{ et } \forall \alpha \geq 0,\ \dim E_\nu(\alpha) = \max(\tau_1^*(\alpha), \tau_2^*(\alpha)).$$

Il y a donc autant d'intervalles sur lesquels le formalisme est violé que de points $q < 0$ en lesquels les graphes de τ_1 et τ_2 se croisent (il est clair que par construction de tels croisements n'ont lieu que sur $\mathbb{R}_-^*$).

Venons-en au résultat plus général établit dans [**103**] sous la condition plus faible (WSC) introduite au début de cette section. En effet cette condition est impliquée par la condition de type finie [**180**].

Théorème 7.14 **([103])**. — *Supposons que* $\mathbf{S}$ *satisfasse la condition (WSC). Soit* U_0 *une boule ouverte telle que* $\ell(U_0) = \ell$. *Alors la mesure* $\nu_{|U_0}$ *satisfait le formalisme multifractal. De plus,* $E_{\nu_{|U_0}}(\alpha) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. *Aussi, on a* $\tau_{\nu_{|U_0}} = \tau_\nu$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *et donc* $\dim E_\nu(\alpha) = \tau_\nu^*(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in [\alpha_{\min}, \tau'_\nu(0^-)]$.

Le même résultat est vrai si U_0 est remplacée par une boule de la forme $S_u(U_0)$ telle que $\ell(S_u(U_0)) = \ell$, et on a $\tau_{\mu_{|S(U_0)}} = \tau_{\mu_{|U_0}}$.

Soit $\mathcal{U} = \{U(x,r) : \ell(U(x,r)) = \ell\}$. Si $\dim(K \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) = 0$, alors, on a $\dim E_\nu(\alpha) = \tau^*_{\nu_{|U_0}}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

La validité du formalisme multifractal en tout point α de la forme $\tau'_\nu(q)$ pour $q > 0$ avait été obtenue dans [**153**]. Il s'avère que ce résultat est vrai pour $q \geq 1$ sans hypothèse sur le système $\mathbf{S}$:

Un résultat général de validité pour les mesures auto-conformes. —

Théorème 7.15 **([99]).** — *Soit μ une mesure auto-conforme. Si $q \geq 1$ et $\tau'_\mu(q)$ existe alors μ satisfait le formalisme multifractal en $\tau'_\mu(q)$.*

Pour avoir des résultats complémentaires sur l'analyse multifractale des mesures de type Gibbs sur les attracteurs d'IFS, les répulseurs conformes et les ensembles invariants hyperboliques, on pourra aussi consulter [**40, 45, 58, 153, 163, 154, 102, 106, 98, 155, 104, 210, 217, 218, 99, 100**] et [**191, 192, 25, 26, 105, 30**], ainsi que [**124, 19**] pour des liens avec l'analyse multifractale des fonctions.

Nous terminons cette sous section en donnant des éléments de preuve du théorème 7.12

Esquisse de la preuve du théorème 7.12. — Nous utiliserons les notations des sections 3.5.1 et 5.5.5, et admettrons le résultat géométrique suivant, qui se déduit du résultat principal de [**209**] et du lemme 4.2 de [**190**].

Lemme 7.1. — *On a $\int_K |\log d(x, \partial U)| \, \mathrm{d}\nu_{\mathbf{p}'}(x) < \infty$ pour tout vecteur de probabilité $\mathbf{p}' \in [0,1]^N$.*

Pour $q \in \mathbb{R}$, désignons par $\mathbf{p}_q$ le vecteur de probabilité $(p_k^q \|S_k\|^{-\tau(q)})_{0\leq k\leq N-1}$ et posons $\mu_q = \mu_{\mathbf{p}_q}$ et $\nu_q = \nu_{\mathbf{p}_q}$. On déduit du Lemme 7.1, de la condition (OSC) et de l'autosimilarité de ν_q que $\mu_q(S_u(K) \cap S_v(K)) = 0$ si u n'est pas un préfixe de v et v n'est pas non plus un préfixe de u. Ainsi, pour tout $u \in \Sigma_N^*$, on a $\nu_q(S_u(K)) = \mu_q([u])$.

De plus, on déduit aussi du lemme qu'il existe un ensemble E_q de ν_q-mesure pleine tel que pour tout x dans E_q il existe un unique $t(x) \in \Sigma_N^+$ tel que $x = \pi_{\mathbf{S}}(t(x))$, et en désignant par $u(x,r)$ l'unique élement u de $S(x,r)$ tel que $x \in S_u(K)$, on on a $\lim_{r\to 0^+} \sup_{u\in S(x,r)} \left|1 - \frac{|u(x,r)\wedge u|}{|u(x,r)|}\right| = 0$. Cela implique que les copies de K de la forme $S_u(K)$ de taille comparable à r qui recontrent

$B(x,r)$ ont des $\nu_{\mathbf{p}}$-masses dont le rapport du logarithme à celui de $\mu(B(x,r))$ tend vers 1 quand r tend vers 0.

En appliquant le théorème ergodique à $\log \mu_{\mathbf{p}}([t_{|n}])$, $\log \mu_q([t_{|n}])$ et $\log \|S_{t_{|n}}\|$ par rapport à μ_q, on peut également choisir E_q de sorte que pour tout $x \in E_q$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu_{\mathbf{p}}(S_{t(x)_{|n}}(K))}{\log \|S_{t(x)_{|n}}\|} = \tau'(q)$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu_q(S_{t(x)_{|n}}(K))}{\log \|S_{t(x)_{|n}}\|} = \tau^*(\tau'(q))$. En particulier, l'étude faite dans la section 5.5.5 donne $\dim E_q \geq \tau^*(\tau'(q))$.

Il n'est alors pas très difficile de déduire des propriétés précédemment énoncées le fait que pour $x \in E_q$ on a aussi $\lim_{r\to 0^+} \frac{\log(\nu_{\mathbf{p}}(B(x,r))}{\log(r)} = \tau'(q)$, soit $E_q \subset E_{\nu_{\mathbf{p}}}(\tau'(q))$, et donc $\dim E_{\nu_{\mathbf{p}}}(\tau'(q)) \geq \tau^*(\tau'(q))$.

Nous avons établi dans la section 5.5.5 l'inégalité $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(q) \geq \tau(q)$ pour $q \geq 0$. Le cas $q < 0$ se traite plus aisément. Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{R}$ nous disposons des informations $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}}(q) \geq \tau(q)$, $\tau^*(\tau'(q)) \leq \dim E_{\nu_{\mathbf{p}}}(\tau'(q))$, et d'après les propositions 6.1 et 6.2 $\dim E_{\nu_{\mathbf{p}}}(\tau'(q)) \leq \tau^*_{\nu_{\mathbf{p}}}(\tau'(q))$. Ceci est suffisant pour conclure que $\tau_{\nu_{\mathbf{p}}} = \tau$ et que le formalisme multifractal est valide en tout α de la forme $\tau'_{\nu_{\mathbf{p}}}(q)$.

8. Analyse multifractale des cascades de Mandelbrot et applications.

Nous établissons dans la section 8.1 un théorème d'analyse multifractale associé aux cascades canoniques de Mandelbrot sur un espace symbolique. Au passage, nous établissons les résultats de finitude des moments de la masse totale d'une telle mesure annoncés dans la section 4.3. Puis dans la section 8.2 nous examinons trois autres questions d'analyse multifractale qui s'y rattachent naturellement : l'analyse multifractale de séries d'ondelettes aléatoires, l'étude fine des accroissements d'un processus gaussien limite d'une cascade additive, et la fragmentation auto-similaire.

8.1. Résultats sur l'espace symbolique. — Notons μ la mesure construite dans la section 4.3.1 dans le cas statistiquement auto-similaire. Le résultat suivant est obtenu dans [**7**] (sauf la partie concernant la linéarisation de la fonction τ_μ obtenue dans [**174**]). Les techniques mises en oeuvre dans sa démonstration sont fondamentales pour l'analyse multifractale des éléments de la classe de $[0,1]$-martingales auto-similaires décrite dans la section 4.3 (voir [**14, 15**]).

Rappelons que la définition de φ (voir (4.3.1)) :

$$\varphi(q) = q - 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_b \mathbb{E}(W^q).$$

On supposera que $\varphi(q) > -\infty$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. Posons

$$J = \{q \in \mathbb{R} : \varphi'(q)q - \varphi(q) \geq 0\}, \quad \overline{q} = \sup(J), \quad \text{et} \quad \underline{q} = \inf(J).$$

Théorème 8.1. — *Supposons que $\varphi(q) > -\infty$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. Les faits suivants ont lieu avec probabilité 1 :*

1. $\tau_\mu(q) = \varphi(q)$ *sur l'intervalle J ;*
2. *si $\overline{q} < +\infty$, alors $\tau_\mu(q) = \varphi'(\overline{q})q$ sur $[\overline{q}, \infty)$;*
3. *si $\underline{q} > -\infty$, alors $\tau_\mu(q) = \varphi'(\overline{q})q$ sur $]-\infty, \underline{q}]$;*
4. $\dim E_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ *si $\tau_\mu^*(\alpha) \geq 0$ et $E_\mu(\alpha) = \emptyset$ sinon.*

Des énoncés moins forts donnant la dimension de $E_\mu(\alpha)$ pour chaque α presque sûrement et non presque sûrement pour tous les α sont établis sous des hypothèses plus ou moins fortes sur la variable W dans les travaux suivants : [**119, 63, 174, 1, 6**] (voir aussi la remarque 8.1). Ces travaux abordent d'autres questions intéressantes que nous avons choisi de ne pas développer ici, comme l'analyse multifractale de la projection de la mesure μ sur des ensembles auto-similaires en loi dans $\mathbb{R}^d$. Enonçons d'abord quelques propositions qui sont les parties essentielles de la preuve du théorème.

Rappelons que la variable Y est la masse totale de la mesure μ. Considérons sa transformée de Laplace :

$$\psi(t) = \mathbb{E}(e^{-tY}).$$

Proposition 8.1. —

(1) *Soit $p > 1$. On a $\mathbb{E}(Y^p) < \infty$ dès que $\varphi(p) > 0$,*

(2) *Soit $p > 0$. Si $\varphi(-p) > -\infty$, alors $\psi(t) = O(t^{-qm})$ et par conséquent $\mathbb{E}(Y^{-qm}) < \infty$ pour tout $q \in (0, p)$.*

Pour $n \geq 1$ et $q \in \mathbb{R}$ soit

$$\widetilde{\tau}_\mu(q) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log_m \mathbb{E}\Big(\sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu([w])^q\Big).$$

Proposition 8.2. —

(1) *Avec probabilité 1, $\tau_\mu(q) \geq \widetilde{\tau}_\mu(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$;*

(2) $\widetilde{\tau}_\mu(q) = \varphi(q)$ *si $\mathbb{E}(Y^q) < \infty$, $\widetilde{\tau}_\mu(q) = -\infty$ sinon.*

Si $q \in \mathrm{Int}(J)$, $w \in \Sigma_m^*$ et $n \geq 1$ soit

$$Y_{q,n}(w) = \sum_{v \in \Sigma_m^n} m^{n(\varphi(q)-q)} \frac{Q(w \cdot v)^q}{Q(w)^q}$$

($Q(w)$ est défini en (32), section 4.3.1).

Proposition 8.3. —

(1) *Avec probabilité 1, pour tout $q \in Int(J)$ et $w \in \Sigma_m^*$, la suite $Y_{q,n}(w)$ converge vers une limite strictement positive $Y_q(w)$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\sigma(\{Q_n(w) : w \in \Sigma_m^n\})$ et $\sigma(\{Y_q(w) : w \in \Sigma_m^n\})$ sont indépendantes, et les variables aléatoires $Y_q(w)$, $w \in \Sigma_n$ sont des copies de $Y_q(\emptyset)$ indépendantes. On note aussi Y_q la variable $Y_q(\emptyset)$;*

(2) *Pour tout sous-intervalle compact K de $Int(J)$, il existe $p_K > 1$ tel que $\mathbb{E}(\sup_{q\in K} Y_q^{p_K}) < \infty$;*

(3) *Avec probabilité 1, pour tout $q \in Int(J)$, la fonction*

$$\mu_q([w]) = m^{|w|(\varphi(q)-q)} Q(w)^q Y_q(w), \ w \in \Sigma_m^* \tag{80}$$

définit une mesure borélienne sur Σ_m^+.

Proposition 8.4. — *Avec probabilité 1, pour tout $q \in Int(J)$, pour μ_q-presque tout $t \in \Sigma_m^+$, on a*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_m m^{-n} Q(t|_n)}{-n} = \varphi'(q)$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_m Y(t|_n)}{n} = 0$,
3. $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_m Y_q(t|_n)}{-n} \geq 0$.

Remarque 8.1. — *Pour $q \in \mathbb{R}$ et $w \in \Sigma_m^*$ posons $W_q(w) = W(w)^q / \mathbb{E}(W^q)$. On a $1 - \mathbb{E}(W_q \log_m(W_q) > 0$, i.e., la limite μ_q de la cascade de Mandelbrot associée à $(W_q(w))_{w\in\Sigma_m^*}$ est non dégénérée (voir section 4.3.1), si et seulement si $q \in Int(J)$. On peut alors obtenir l'énoncé “pour tout $q \in Int(J)$, avec probabilité 1, pour μ_q-presque tout $t \in \Sigma_m^+$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_m(\mu_q([t_{|n}]))}{-n} = q\varphi'(q) - \varphi(q)$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_m(\mu([t_{|n}]))}{-n} = \varphi'(q)$” en appliquant les théorèmes 5.13 et 5.14 à μ_q et au couple $(\mu_W, \mu_{W'}) = (\mu_q, \mu)$ respectivement. C'est cette approche qui conduit aux résultats d'analyse multifractale moins forts mentionnés après l'énoncé du théorème 8.1.*

Démonstration du théorème 8.1. Nous allons d'abord établir la validité du formalisme multifractal puis obtenir l'expression de τ_μ. Nous ne traiterons pas le cas des points au bord de l'intervalle $\tau'(J)$. Le lecteur intéressé par cette question délicate pourra se reporter à [**7**], et [**13**] pour un traitement complet.

Validité du formalisme multifractal. Notons d'abord que grâce à (80) et aux assertions (1) et (3) de la proposition 8.4, avec probabilité 1, pour tout $q \in Int(J)$ on a

$$\dim_*(\mu_q) \geq \varphi^*(\varphi'(q)),$$

et on déduit des assertions (1) et (2) de la même proposition que

$$\dim E_\mu(\tau'(q)) \geq \varphi^*(\varphi'(q)).$$

Par conséquent, la proposition 8.2 implique la validité du formalisme multifractal sur $Int(\varphi'(J))$ et l'égalité de τ_μ et φ sur $J = [\underline{q}, \overline{q}]$. Il reste à montrer que τ_μ est dérivable en $\overline{q}$ (resp. $\underline{q}$) et linéaire sur $[\overline{q}, \infty)$ (resp. $(-\infty, \underline{q}]$) si $\overline{q} < \infty$ (resp. $\underline{q} > -\infty$). Nous ne traitons que le cas $\overline{q} < \infty$, le cas $\underline{q} > -\infty$ étant similaire.

Notons que l'égalité $\tau_\mu = \varphi$ sur J implique

$$\tau_\mu'(\overline{q}^-) = \varphi(\overline{q})/\overline{q} = h_{\min}.$$

De plus, par concavité de τ_μ, on a

$$\tau_\mu(q) \leq \tau_\mu(\overline{q}) + \tau_\mu'(\overline{q}^-)(q - \overline{q}) = \varphi(\overline{q}) + \varphi'(\overline{q})(q - \overline{q}) = h_{\min} q.$$

L'inégalité inverse pour $q \geq \overline{q}$, et donc la dérivabilité de τ_μ en $\overline{q}$ s'obtient en utilisant le fait que $q/\overline{q} \geq 1$ pour écrire (cette idée provient de [**174**])

$$\sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu(I_w)^q \leq \Big[\sum_{w \in \Sigma_m^n} \mu(I_w)^{\overline{q}} \Big]^{q/\overline{q}}.$$

Cette inégalité implique

$$\tau_\mu(q) \geq q \cdot (\tau_\mu(\overline{q})/\overline{q}) = q h_{\min}.$$

□

Présentons maintenant les preuves des propositions énoncées ci-dessus. Pour démontrer la proposition 8.1, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 8.1 **([5])**. — *Pour $p \in (1, 2]$, il existe $C_p > 0$ tel que pour toute collection $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de variables aléatoires indépendantes et centrées à valeurs complexes on ait*

$$\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n X_i\Big|^p\Big) \leq C_p \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_i|^p).$$

Démonstration de la proposition 8.1

(1) Supposons d'abord $p \in (1,2]$. Soit $n \geq 1$. Posant $Y_0 = 1$, on a

$$Y_n - Y_{n-1} = m^{-(n-1)} \sum_{w \in \Sigma_m^{n-1}} Q(w) \Big(\sum_{k=0}^{m-1} m^{-1}(W(w \cdot k) - 1) \Big).$$

Les variables $W(w)$, $w \in \Sigma_m^*$ étant i.i.d. et d'espérance 1, le lemme précédent implique

$$\mathbb{E}\left(|Y_n - Y_{n-1}|^p | \sigma(Q(w), w \in \Sigma_{m-1})\right) \leq C_p \sum_{w \in \Sigma_m^{n-1}} b^{-p|w|} Q(w)^p 2^p m^{1-p}\, \mathbb{E}(W^p),$$

où l'on a utilisé l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(\Big| \sum_{k=0}^{m-1} b^{-1}(W(w \cdot k) - 1 \Big|^p \right) \leq 2^p m^{1-p}\, \mathbb{E}(W^p).$$

Finalement

$$\mathbb{E}\left(|Y_n - Y_{n-1}|^p\right) \leq 2^p C_p m^{n\varphi(p)}, \tag{81}$$

et l'on a bien convergence dans L^p de la martingale $(Y_n)_{n\geq 1}$, car $\varphi(p) > 0$.

Supposons maintenant $p > 2$ et supposons que nous sachions que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^{\overline{p}-1}$, où $\overline{p}$ est égal à la partie entière de $p+1$. Pour $n \geq 1$, on écrit (en reprenant l'idée utilisée dans [**138**])

$$Y_n^p \leq b^{-p} \Big(\sum_{k=0}^{m-1} W(k)^{p/\overline{p}} Y_{n-1}(k)^{p/\overline{p}} \Big)^{\overline{p}} \leq b^{-p} \sum_{k=0}^{m-1} W(k)^p Y_{n-1}(k)^p + T_n(p),$$

avec

$$T_n(p) = \sum_{\substack{0 \leq j_0, \ldots, j_{m-1} \leq \overline{p}-1 \\ j_k \neq \overline{p}, j_0 + \cdots + j_{m-1} = \overline{p}}} \gamma_{j_0, \ldots, j_{m-1}} \prod_{k=0}^{m-1} W(k)^{j_k p/\overline{p}} Y_{n-1}(k)^{j_k p/\overline{p}}.$$

Comme $(Y_n^p)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale, on a

$$\mathbb{E}(Y_n^p) \leq b^{-\varphi(p)}\, \mathbb{E}(Y_{n-1}^p) + \mathbb{E}(T_n(p)) \leq b^{-\varphi(p)}\, \mathbb{E}(Y_n^p) + \mathbb{E}(T_n(p)).$$

Comme $b^{-\varphi(p)} < 1$, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathbb{E}(T_n(p))$ est borné. Or, en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\mathbb{E}(W(j_k)^{j_k p/\overline{p}} Y_{n-1}(k)^{j_k p/\overline{p}}) \leq (\mathbb{E}(W^{j_k}))^{p/\overline{p}} (\mathbb{E}(Y_{n-1}^{j_k}))^{p/\overline{p}}.$$

Le dernier terme ci-dessus est uniformément borné par rapport à j_k d'après notre hypothèse, car $j_k \leq \overline{p} - 1$.

(2) Le fait que les variables $W(w)$ soient indépendantes et strictement positives dans l'équation (30) implique que l'événement $\{Y=0\}$ est de probabilité nulle. On a donc $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$ et l'équation (30) impose

$$\psi(t)=\big(\mathbb{E}\,\psi(tW/m)\big)^m. \tag{82}$$

Le résultat provient d'arguments développés indépendamment dans [**136, 174, 6**], puis dans [**160**].

Soit $q>0$. Supposons que nous ayons montré que $\psi(t)=O(t^{-mq})$ au voisinage de $+\infty$. Alors, pour $x>0$ on a

$$\mathbb{P}(Y\le x)\le e^{tx}\psi(t)$$

et le choix $t=mq/x$ donne $\mathbb{P}(Y\le x)=O(x^{mq})$ en 0^+. Donc

$$\mathbb{E}(Y^{-h})<\infty \quad \text{si} \quad h\in(0,mq).$$

Posons $\widetilde{W}_0=W/m$ et fixons $q\in(0,p)$. Comme $\psi\le 1$ et $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$, on déduit de (82) qu'il existe $\gamma\in(0,1)$ et $t_0>0$ tels que

$$\psi(t)\le\gamma\,\mathbb{E}(\psi(t\widetilde{W}_0)),\ \forall t\ge t_0. \tag{83}$$

De plus, γ peut être choisi tel que $\gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q})<1$.

Soit $(\widetilde{W}_i)_{i\ge1}$ une suite de copies de $\widetilde{W}_0$ indépendantes. Comme $\psi\le1$, pour $t\ge t_0$ on obtient par récurrence en utilisant (83) que, pour $n\ge2$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\le \gamma\mathbb{P}(\widetilde{W}_0t<t_0)+\gamma\,\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{W}_0t\ge t_0\}}\phi(\widetilde{W}_0t)\right)\\
&\le \gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q})(t_0/t)^q+\gamma^2\,\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\widetilde{W}_0t\ge t_0\}}\psi(\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1t)\right)\\
&\le \gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q})(t_0/t)^q+\gamma^2\,\mathbb{E}\left(\phi(\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1t)\right)\\
&\le \gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q})(t_0/t)^q+\gamma^2(\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q}))^2(t_0/t)^q+\gamma^2\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1t\ge t_0\}}\psi(\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1t))\\
&\le (t_0/t)^q\sum_{k=1}^n(\gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q}))^k+\gamma^n\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1\cdots\widetilde{W}_{n-1}t\ge t_0\}}\psi(\widetilde{W}_0\widetilde{W}_1\cdots\widetilde{W}_{n-1}t)).
\end{aligned}$$

Comme $\psi\le1$, $\gamma<1$ et $\gamma\,\mathbb{E}(\widetilde{W}_0^{-q})<1$, on obtient $\psi(t)=O(t^{-q})$ en faisant tendre n vers l'infini. En injectant cette estimation dans (82) on obtient $\psi(t)=O(t^{-mq})$. $\square$

Démonstration de la proposition 8.2 La concavité des fonctions τ_μ et $\widetilde{\tau}_\mu$ permet de se contenter de montrer que pour $q\in\mathbb{R}$ fixé, on a $\tau_\mu(q)\ge\widetilde{\tau}_\mu(q)$ avec probabilité 1.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Supposons que $\mathbb{E}(Y^q) < \infty$. Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant (30), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sum_{n\geq 1} m^{nt} \sum_{w\in\Sigma_n} \mu([w])^q\Big) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{n\geq 1} m^{nt} \sum_{w\in\Sigma_n} |Q(w)|^q \cdot Y(w)^q\Big)\\ &= \sum_{n\geq 1} m^{nt} m^{-n\varphi(q)}\, \mathbb{E}(Y^q).\end{aligned}$$

En particulier $\widetilde{\tau}_{F,m}(q) = \varphi(q)$. Si $t < \varphi(q)$ alors presque sûrement

$$\sum_{n\geq 1} m^{nt} \sum_{w\in\Sigma_n} \mu([w])^q < \infty,$$

donc $\tau_\mu(q) \geq t$ presque sûrement.

Si $\mathbb{E}(Y^q) = \infty$, le calcul précédent montre que l'on a $\widetilde{\tau}_\mu(q) = -\infty$. $\square$

Démonstration de la proposition 8.3.

(1) et (2). Pour $q \in \mathrm{Int}(J)$ et $w \in \Sigma_m^*$ soit

$$W_q(w) = W^q(w)/\,\mathbb{E}(W^q).$$

Si $(q,p) \in \mathrm{Int}(J) \times [1,\infty)$, posons

$$\Phi(q,p) = m^{1-p}\,\mathbb{E}(W_q^p) = m^{p\varphi(q)-\varphi(pq)}.$$

Si $q \in \mathrm{Int}(J)$, la propriété $\varphi^*(\varphi'(q)) > 0$ implique $\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}(q,1^+) < 0$, et il existe $p_q > 1$ tel que $\Phi(q,p_q) < 1$. Ainsi, dans un voisinage V_q de q, on a $\Phi(q,p) < 1$. Si K est un sous-intervalle compact non trivial de $\mathrm{Int}(J)$, il est recouvert par un nombre fini de tels V_{q_i} et, pour tout $q \in K$, on a $\Phi(q,p_K) < 1$, où $p_K = \inf_i p_{q_i}$.

Nous montrons maintenant que les martingales $(Y_{q,n}(w))_{n\geq 1}$, $q \in K$, convergent presque sûrement simultanément.

Pour chaque point q de K, il existe un voisinage V_q de q dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout $w \in \Sigma_m^*$ et $z \in V$, la variable aléatoire

$$W_z = \frac{W^z}{\mathbb{E}(W^z)}$$

soit bien définie et de plus

$$\sup_{z\in V_q} \Phi(z,p_K) < 1,$$

où

$$\Phi(z,p_K) = m^{1-p_K}\,\mathbb{E}(|W_z|^{p_K})$$

est une extension de $\Phi(\cdot, p_K)$ à V_q. En extrayant un recouvrement fini de K par $\bigcup_{q\in K} V_q$, on obtient un voisinage V de K dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\sup_{z\in V} \Phi(z, p_K) < 1,$$

Pour $z \in V$ et $w \in \Sigma_m^*$, soit

$$Y_{z,n}(w) = \sum_{v\in\Sigma_n} m^{n(\varphi(z)-z)} \frac{Q(w\cdot v)^z}{Q(w)^z},$$

où $\varphi(z)$ est défini par

$$m^{\varphi(z)} = \frac{m^{z-1}}{\mathbb{E}(W^z)}.$$

On désignera $Y_{z,n}(\emptyset)$ par $Y_{z,n}$. En utilisant (81), on obtient pour $n \geq 1$

$$\|Y_{z,n} - Y_{z,n-1}\|_{p_K} \leq 2^{p_K} C_{p_K} \Phi(z, p_K)^{n/p_K} \leq (\sup_{z\in V} \Phi(z, p_K))^{n/p_K},$$

où $Y_{z.0} = 1$. Comme, avec probabilité 1, les fonctions $z \in V \mapsto Y_{z,n}$, $n \geq 0$, sont analytiques, si nous fixons un disque fermé $D(z_0, 2\rho)$ inclus dans V, la formule de Cauchy donne

$$\sup_{z\in D(z_0,\rho)} |Y_{z,n} - Y_{z,n-1}| \leq \rho^{-1} \int_{\partial D(z_0,2\rho)} |Y_{u,n} - Y_{u,n-1}|\, |\mathrm{d}u|/2\pi.$$

Alors, l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\sup_{z\in D(z_0,\rho)} |Y_{z,n} - Y_{z,n-1}|^{p_K}\big) &\leq 2^{p_K} \int_0^{2\pi} \mathbb{E}(|Y_{z_0+2\rho e^{it},n} - Y_{z_0+2\rho e^{it},n-1}|^{p_K}) \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \\ &\leq 2^{p_K} (\sup_{z\in V} \Phi(z, p_K))^n.\end{aligned}$$

Donc, avec probabilité 1, $Y_{z,n}$ converge uniformément en z sur le compact $D(z_0, \rho)$ vers une limite Y_z, et l'on a

$$\Big\|\sup_{z\in D(z_0,\rho)} Y_z\Big\|_{p_K} < \infty.$$

Comme K peut être recouvert par un nombre fini de tels disques, on obtient la convergence simultanée des suites $(Y_{q,n})_{n\geq 1}$ vers Y_q pour $q \in K$ et (2). De plus, comme $\mathrm{Int}(J)$ est une réunion croissante dénombrable de tels compacts K et Σ_m^* est dénombrable, la convergence simultanée a lieu pour toutes les martingales $(Y_{q,n}(w))_{n\geq 1}$, $q \in \mathrm{Int}(J)$, $w \in \Sigma_m^*$. L'idée de recourir à une extension à $\mathbb{C}$ des fonctions $Y_{q,n}$ a été introduite dans l'étude des processus de branchement [**34**].

Pour terminer la preuve de (1), il faut montrer qu'avec probabilité 1, $q \in K \mapsto Y_q$ ne s'annule pas. A une transformation affine près, supposons $K = [0,1]$. Si I est un sous-intervalle dyadique fermé de $[0,1]$, notons E_I l'événement $\{\exists\, q \in I:\ Y_q = 0\}$, et notons I_0 et I_1 ses fils. Chaque E_I est un événement de probabilité 0 ou 1. Donc, si I est tel que $\mathbb{P}(E_I) = 1$, il existe $j \in \{0,1\}$ tel que $\mathbb{P}(E_{I_j}) = 1$. Supposons que $\mathbb{P}(E_{[0,1]}) = 1$. La remarque précédente permet de construire une suite strictement décroissante $(I(n))_{n\geq 0}$ d'intervalles dyadiques fermés tels que $\mathbb{P}(E_{I(n)}) = 1$. Soit q_0 l'unique élément de $\bigcap_{n\geq 0} I(n)$. Comme $q \mapsto Y_q$ est continue, on a $\mathbb{P}(Y_{q_0} = 0) = 1$. Ceci contredit le fait que $(Y_{q_0,n})_{n\geq 1}$ converge vers Y_{q_0} dans L^{p_K}.

(3) C'est une conséquence simple de la propriété de branchement

$$Y_{q,n+1}(w) = b^{-1} \sum_{i=0}^{b-1} W_q(w\cdot i)\, Y_{q,n}(w\cdot i) \quad (\forall n \geq 1,\ \forall w \in \Sigma_m^*).$$

□

Démonstration de la proposition 8.4.
(1) Pour $\epsilon > 0$ et $n \geq 1$, posons

$$E^1_{q,n,\epsilon} = \{t \in \Sigma_m^+ : m^{n(\varphi'(q)-\epsilon)} m^{-n} Q_n(t|_n) \geq 1\}$$

et

$$E^{-1}_{q,n,\epsilon} = \{t \in \Sigma_m^+ : m^{n(\varphi'(q)+\epsilon)} m^{-n} Q_n(t|_n) \leq 1\}.$$

Nous allons montrer que pour tout sous-intervalle compact K de $\mathrm{Int}(J)$ et tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{q\in K} \sum_{n\geq 1} \mu_q(E^\lambda_{q,n,\epsilon}\right) < \infty \tag{84}$$

Alors, avec probabilité 1, pour tout $q \in K$ et $\lambda \in \{-1,1\}$ la série $\sum_{n\geq 1} \mu_q(E^\lambda_{q,n,\epsilon})$ converge. Comme $\mathrm{Int}(J)$ est réunion dénombrable de tels compacts, ceci est vrai pour tout $q \in \mathrm{Int}(J)$. Ainsi, nous déduisons du lemme de Borel-Cantelli appliqué à $\mu_q/\|\mu_q\|$ qu'avec probabilité 1, pour tout $q \in \mathrm{Int}(J)$, pour μ_q-presque tout $t \in \Sigma_m^+$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq N, m^{-n} Q(t|_n)| \in [m^{-n(\varphi'(q)+\epsilon)}, m^{-n(\varphi'(q)-\epsilon)}].$$

Ceci étant vrai pour une suite de nombres ϵ convergeant vers 0, on a la conclusion.

Prouvons (84). Soit K un intervalle compact inclus dans $\mathrm{Int}(J)$. Pour $\eta \geq 0$ et $q \in K$ on a

$$\mu_q(E^1_{q,n,\epsilon}) \leq \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu_q([w])\Big(m^{n(\varphi'(q)-\epsilon)} \cdot m^{-n} Q(w)\Big)^{\eta}$$

et

$$\mu_q(E^{-1}_{q,n,\epsilon}) \leq \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mu_q([w])\Big(m^{n(\varphi'(q)+\epsilon)} \cdot m^{-n} Q(w)\Big)^{-\eta}.$$

Comme $\mu_q([w]) = m^{n(\varphi(q)-q)}Q(w)^q Y_q(w)$, pour $\lambda \in \{-1,1\}$, on a

$$\mu_q(E^{\lambda}_{q,n,\epsilon}) \leq \sum_{w\in\Sigma_m^n} m^{n(\varphi(q)-q+\lambda(\varphi'(q)-1)\eta-\epsilon\eta)}|Q(w)|^{q+\lambda\eta} Y_q(w).$$

Posons

$$H_n^{\eta,\lambda}(q) = \sum_{w\in\Sigma_m^n} m^{n(\varphi(q)-q+\lambda(\varphi'(q)-1)\eta-\epsilon\eta)}|Q(w)|^{q+\lambda\eta}. \tag{85}$$

Ecrivons $K = [q_0, q_1]$. Comme les familles $\big\{H_n^{\eta,\lambda}(q)\big\}_{q\in K}$ et $\{Y_q(w)\}_{w\in\Sigma_m^n, q\in K}$ sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{q\in K} \mu_q(E^{\lambda}_{q,n,\epsilon}) &\leq \mathbb{E}(\sup_{q\in K} Y_q)\, \mathbb{E}\big(\sup_{q\in K} H_n^{\eta,\lambda}(q)\big)\\
&\leq \mathbb{E}(\sup_{q\in K} Y_q)\Big(\mathbb{E}\big(H_n^{\eta,\lambda}(q_0)\big) + \int_{q_0}^{q_1} \mathbb{E}\big(\big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} H_n^{\eta,\lambda}(q)\big|\big)\mathrm{d}q\Big).
\end{aligned}$$

Alors (84) vient du fait que $\mathbb{E}(\sup_{q\in K} Y_q) < \infty$ (proposition 8.3(2)) et du lemme suivant.

Lemme 8.2. — *Il existe $C > 0$, $\delta > 0$ et $\eta_* > 0$ tels que, pour tout $q \in K$, $\eta \in (0, \eta_*)$ et $\lambda \in \{-1,1\}$, on ait*

$$\max\Big\{\mathbb{E}\big(H_n^{\eta,\lambda}(q)\big), \mathbb{E}\big(\big|\frac{d}{dq} H_n^{\eta,\lambda}(q)\big|\big)\Big\} \leq Cnb^{-n\delta}.$$

Démonstration. Comme φ est C^2, on peut choisir $\eta_0 > 0$ tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$, on ait

$$\delta_\eta = \inf_{q\in K} \epsilon\eta + \varphi(q+\lambda\eta) - (\varphi(q) + \lambda\varphi'(q)\eta) > 0. \tag{86}$$

Soit

$$\widetilde{m}(n, q, \eta, \epsilon) = m^{n(\varphi(q)+\lambda\varphi'(q)\eta-\varphi(q+\lambda\eta))-\epsilon\eta}.$$

Un calcul montre qu'il existe $C>0$ tel que pour, $\eta\in(0,\eta_0)$ et $n\geq 1$, on ait

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H_n^{\eta,\lambda}(q)\right) &= \widetilde{m}(n,q,\eta,\epsilon)\leq m^{-n\delta_\eta}\\ \mathbb{E}\left(\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}H_n^{\eta,\lambda}(q)\Big|\right) &\leq Cn\cdot\widetilde{m}(n,q,\eta,\epsilon)\leq Cn\,m^{-n\delta_\eta}.\end{aligned}$$

(2) Soit K un sous-intervalle compact de $\mathrm{Int}(J)$ et $\lambda\in\{1,-1\}$. Pour $a>1$ et $n\geq 1$, soit

$$E_{n,a}^\lambda=\{t\in\Sigma_m^+ : Y(t|_n)^\lambda>a^n\}.$$

Nous devons seulement montrer que

$$\mathbb{E}(\sup_{q\in K}\sum_{n\geq 0}\mu_q(E_{n,a}^\lambda))<\infty. \tag{87}$$

On a alors qu'avec probabilité 1, pour tout $q\in K$, pour μ_q-presque tout t, si n est assez grand

$$-\log a\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{\log Y(t|_n)}{n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{\log Y(t|_n)}{n}\leq\log a.$$

Ceci étant vrai pour une suite de nombres $a>1$ convergeant vers 1, on a la conclusion. Montrons (87). On a

$$\begin{aligned}\sup_{q\in K}\mu_q(E_{n,a}^\lambda) &= \sup_{q\in K}\sum_{w\in\Sigma_m^n}\mathbf{1}_{\{Y(w)^\lambda>a^n\}}\cdot\mu_q([w])\\ &= \sup_{q\in K}\sum_{w\in\Sigma_m^n}m^{n(\varphi(q)-q)}Q_n(w)^q\cdot\mathbf{1}_{\{Y(w)>a^n\}}\cdot Y_q(w).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{q\in K}\mu_q(E_{n,a}^\lambda)\right)\leq\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Y^\lambda>a^n\}}\cdot\sup_{q\in K}Y_q\right)\mathbb{E}\left(\sup_{q\in K}H_n^{0,0}(q)\right),$$

où $H_n^{0,0}(q)$ est défini comme en (85). La preuve de l'étape 1 donne $C>0$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{q\in K}H_n^{0,0}(q)\right)\leq C(1+|K|)n.$$

De plus, l'inégalité de Hölder implique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Y^\lambda>a^n\}}\cdot\sup_{q\in K}Y_q\right) &\leq \|\sup_{q\in K}Y_q\|_{p_K}\mathbb{P}(Y^\lambda>a^n)^{1-1/p_K}\\ &\leq \|\sup_{q\in K}Y_q\|_{p_K}[\mathbb{E}(Y^\lambda)]^{1-1/p_K}a^{-n(1-1/p_K)}.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(Y^\lambda) < \infty$ on en déduit

$$\mathbb{E}\big(\sup_{q\in K} \mu_q(E_{n,a}^\lambda)\big) = O(na^{-n(1-1/p_K)})$$

(avec $a > 1$), donc (87).

(2) On procède comme en (2). Pour $a > 1$, $n \geq 0$ et $q \in K$ soit

$$F_{n,a}^\lambda(q) = \{t \in \Sigma_m^+ : Y_q(t|_n) > a^n\}.$$

Pour $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{q\in K} \mu_q(F_{n,a}(q)) &= \sup_{q\in K} \sum_{w\in\Sigma_m^n} \mathbf{1}_{\{Y_q(w)>a^n\}} \cdot \mu_q([w]) \\ &\leq \sup_{q\in K} m^{n(\varphi(q)-q)} Q_n(w)^q \cdot a^{-n\eta} Y_q(w)^{1+\eta}. \end{aligned}$$

En prenant $\eta = p_K - 1$, on obtient

$$\mathbb{E}\big(\sup_{q\in K} \mu_q(F_{n,a}(q))\big) \leq a^{-n(p_K-1)}\, \mathbb{E}\big(\sup_{q\in K} H_n^{0,0}(q)\big)\, \mathbb{E}(\sup_{q\in K} Y_q^{p_K}) = O(na^{-n(p_K-1)}).$$

□

8.2. Applications à l'étude des trajectoires de certains processus. —

8.2.1. **Projections naturelles des cascades canoniques de Σ_m^+ sur $[0,1]$.**— Le théorème 8.1 est encore valable pour la mesure obtenue $\widetilde{\mu}$ en projetant naturellement la mesure μ sur l'intervalle $[0,1]$, les ensembles $E_\mu(\alpha)$ et la dimension de Hausdorff s'entendant au sens de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. L'étude faite sur l'arbre permet de contrôler la densité logarithmique de μ sur les intervalles m-adiques seulement. On obtient le contrôle de la μ-masse des boules centrées et donc le résultat souhaité en étendant le résultat de la proposition 8.4.1. aux mots de la même génération que w qui codent les intervalles m-adiques voisin de I_w (voir [**9**]).

8.2.2. **Séries d'ondelettes aléatoires.** — Pour une fonction réelle F localement bornée définie sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$, l'exposant ponctuel de Hölder de F en $t \in I$, noté $h_F(t)$, est défini de la façon suivante : $\mathbb{C}[x]$ désignant l'espace des fonctions polynomiales

$$h_F(t) = \sup\Big\{h \geq 0 :\ \exists\, P \in \mathbb{C}[x],\ |F(u) - P(u)| = O(|u-t|^h)\ \ (u \to t)\Big\}.$$

On définit alors pour $h \geq 0$ l'ensemble

$$E_F(h) = \{t \in I : h_F(t) = h\}.$$

Donnons-nous une ondelette ψ dans la classe de Schwartz comme il en est construit dans [**157**], de sorte que les fonctions $2^{j/2}\psi(2^j t-k)$, $j,k\in\mathbb{Z}^2$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et que tous les moments de ψ soient nuls.

Si la fonction F est de classe C^ε sur l'intérieur de I pour un $\varepsilon>0$, alors l'exposant de Hölder de F en un point t intérieur à I est donné par [**123**]

$$h_F(t)=\liminf_{k2^{-j}\to t}\frac{\log|d_{j,k}(F)|}{\log(2^{-j}+|t-k2^{-j}|)}$$

en fonction des coefficients d'ondelettes de F définis par

$$d_{j,k}(F)=\int_{\mathbb{R}}2^jF(u)\psi_{j,k}(u)\,du.$$

De façon équivalente [**126**], en notant $I_{j,k}$ l'intervalle dyadique $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$, puis en définissant le coefficient d'ondelette *dominant*

$$\lambda_{j,k}(F)=\sup_{I_{j',k'}\subset I_{j,k}}|d_{j',k'}(F)|,$$

et enfin en notant $\lambda_j(t)=\sup_{k,|k-[2^jt]|\le 1}\lambda_{j,k}(F)$, on a

$$h_F(t)=\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\lambda_j(t)}{\log 2^{-j}}.$$

Dans [**2**], les auteurs proposent un modèle de turbulence en construisant sur $I=]0,1[$ une série d'ondelettes dont les coefficients sont obtenus à l'aide d'une cascade de type canonique mais non nécessairement positive : on choisit une variable aléatoire réelle $\mathcal{W}$ telle que $\mathbb{P}(|\mathcal{W}|>0)=1$ et telle qu'il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $h\in[0,\eta]$, $0<T'(0)<\infty$ et $T^*(h)<0$, où

$$T(q)=-1-\log_2\mathbb{E}(|\mathcal{W}|^q)\qquad(q\in\mathbb{R}).$$

Puis on choisit une suite $(\mathcal{W}(w))_{w\in\Sigma_2^*}$ de copies de $\mathcal{W}$ indépendantes. Une série d'ondelettes F est alors définie sur I par :

$$F(t)=\sum_{j\ge 0}\sum_{k=0}^{2^j-1}d_{j,k}(F)\psi(2^jt-k)$$

par ses coefficients

$$d_{j,k}(F)=\mathcal{W}(w_1)\mathcal{W}_{w_1w_2}\cdots\mathcal{W}(w_1w_2\cdots w_j)\quad\text{pour } k=\sum_{i=1}^{j}w_i2^{-i}.$$

Sous les hypothèses faites sur T, on montre en utilisant une inégalité de type Tchernov que les produits de poids aléatoires définissant les coefficients convergent exponentiellement vers 0, ce qui garantit que F soit continue et höldérienne.

Soit
$$W = |\mathcal{W}| / \mathbb{E}(|\mathcal{W}|).$$
Supposons que
$$0 < W \le 2, \qquad \mathbb{P}(W = 2) < 1/2, \qquad T > -\infty \ \text{ sur } \ \mathbb{R}.$$
Définissons
$$h_{\min} = \inf\{0 < h < T'(0) : \ T^*(h) \ge 0\}$$
et
$$h_{\max} = \sup\{h > T'(0) : \ T^*(h) \ge 0\}.$$
Alors, les résultats établis dans les sections 8.1 et 8.2.1 pour la cascade canonique engendrée par les poids $W(w) = |\mathcal{W}(w)| / \mathbb{E}(|\mathcal{W}|)$ permettent d'obtenir le résultat suivant (voir [**19**], où plus généralement un lien est établi entre l'analyse multifractale des mesures et celle des séries d'ondelettes pondérées par des coefficients déduits d'une mesure).

Dans les notations du formalisme multifractal sur Σ_2, définissons
$$\varkappa(t, 2^{-n}) = \log \lambda_j\big(\pi_2(t)\big)$$
$$\widetilde{X}_\varkappa(\alpha) = \Big\{t \in \Sigma_2 : \liminf_{n\to\infty} \frac{\varkappa(t, 2^{-n})}{-n \log 2} = \alpha\Big\}.$$
Posons
$$J = \{q \in \mathbb{R} : T'(q)q - T(q) \ge 0\}$$
$$\overline{q} = \sup(J) \ \text{ et } \ \underline{q} = \inf(J).$$

Théorème 8.2. — *Avec probabilité 1, on a*

(1) $\dim E_F(h) = T^*(h) = \dim \widetilde{X}_\varkappa(h)$ *si* $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$, *et* $E_F(h) = \emptyset = \widetilde{X}_\varkappa(h)$ *si* $h \notin [h_{\min}, h_{\max}]$ *;*

(2) $\tau_\varkappa(q) = T(q)$ *sur l'intervalle* J *et* $\tau_\varkappa(q) = T'(\overline{q})q$ *sur* $]-\infty, \underline{q}] \cup [\overline{q}, \infty[$.

8.2.3. **Un processus gaussien limite d'une cascade additive.** — La proposition qui suit introduit un processus gaussien obtenu comme limite d'une cascade additive de poids aléatoires gaussiens indépendants. Ce processus est apparu naturellement dans un théorème central limite au cours de l'étude des cascades de Mandelbrot comme système dynamique sur certaines lois de probabilités [**18**].

Si $m \ge 2$ est un entier et $w \in \Sigma_m^*$, alors on notera I_w le sous-intervalle m-adique de $[0,1]$ naturellement codé par w, et l'on notera $\Delta(f, I_w)$ l'accroissement sur I_w de toute fonction f définie sur $[0,1]$.

Proposition 8.5. — [**18**] *Il existe un unique processus gaussien continu* $(X_t)_{t\in[0,1]}$, *tel que* $X(0)=0$ *et pour tout* $j\geq 1$, *la matrice de covariance* M_j *du vecteur* $\big(\Delta(X,I_w)\big)_{w\in\Sigma_m^j}$ *est donnée par*

$$M_j(w,w')=\begin{cases} b^{-2j}\big(1+(b-1)|w|\big) & \textit{si } w=w',\\ b^{-2j}(b-1)|w\wedge w'| & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Le processus X peut être construit de la façon suivante. Soit $\{\xi(w)\}_{w\in\Sigma_m^*}$ une famille de variable aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $w\in\Sigma_m^*$, soit $\zeta(w)$ la limite de la martingale

$$\zeta_n(w)=\sqrt{m-1}\sum_{v\in\bigcup_{k=1}^n\Sigma_m^k} m^{-|v|}\xi(wv).$$

On a $\zeta(w)\sim\mathcal{N}(0,1)$. Posons

$$M(w)=m^{-|w|}\Big(\zeta(w)+\sqrt{m-1}\sum_{1\leq k\leq|w|}\xi(w|_k)\Big). \tag{88}$$

Alors, avec probabilité 1, il existe une unique fonction continue f telle que $f(0)=0$ et $\Delta(f,I_w)=M(w)$ pour tout $w\in\Sigma_m^*$. Ces fonctions définissent un processus stochastique de même loi que X.

La comparaison de l'expression (88) donnant l'accroissement du processus X sur un intervalle m-adique avec celle des accroissements d'une cascade multiplicative de Mandelbrot sur un tel intervalle justifie la terminologie de cascade additive.

L'expression de $M(w)$ dans (88) indique que cet accroissement est égal à la longueur de I_w, corrigée par la somme d'une variables gaussienne et d'une marche aléatoire de branchement gaussienne dont l'ordre de grandeur est de l'odre du logarithme de $|I_w|$, le processus est donc essentiellement monofractal d'exposant 1. L'étude fine de cette marche aléatoire permet de préciser grandement le comportement des accroissements m-adiques en considérant pour $\alpha\in\mathbb{R}$ les ensembles

$$\overline{E}_\alpha=\left\{t\in[0,1):\limsup_{n\to\infty}\frac{\Delta(X,I_n(t))}{n\cdot m^{-n}}=\alpha\sqrt{m-1}\right\},$$
$$\underline{E}_\alpha=\left\{t\in[0,1):\liminf_{n\to\infty}\frac{\Delta(X,I_n(t))}{n\cdot m^{-n}}=\alpha\sqrt{m-1}\right\},$$

et

$$E_\alpha=\underline{E}_\alpha\bigcap\overline{E}_\alpha,$$

où $I_n(t)$ désigne l'intervalle m-adique semi-ouvert à droite contenant t.

Formellement, la marche aléatoire de branchement gaussienne considérée est de même nature que le logarithme de l'accroissement d'une cascade de Mandelbrot. Le calcul des dimensions de Hausdorff des ensembles que nous venons de définir utilise donc les mêmes arguments que celui des ensembles $E_\mu(\alpha)$ dans la section 8.1. On a le résultat suivant.

Théorème 8.3. — [**18**] *Avec probabilité 1,*

1. *Le module de continuité de* X *est un* $\mathrm{O}\big(\delta\log(1/\delta)\big)$,
2. X *n'est pas dans la classe de Zygmund,*
3. *l'ensemble* E_0 *contient un ensemble de mesure de Lebesgue pleine en chaque point où* X *n'est pas dérivable,*
4. $\dim E_\alpha = \dim \underline{E}_\alpha = \dim \overline{E}_\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2\log m}$ *si* $|\alpha| \leq \sqrt{2\log m}$, *et* $E_\alpha = \emptyset$ *si* $|\alpha| > \sqrt{2\log m}$.

Le problème de déterminer si X est ou non nulle part dérivable reste ouvert.

8.2.4. **Métrique sur l'espace symbolique donnée par une cascade et lien avec la fragmentation auto-similaire.** — Nous considérons à présent un couple (W, L) de variables aléatoires dont chaque composante permet de définir une cascade canonique de Mandelbrot non dégénérée. Puis on considère une famille $\{(W(w), L(w))\}_{w\in\Sigma_m^*}$ de copies de (W, L) indépendantes. On obtient grâce à la construction décrite dans la section 4.3.1 deux mesures μ_W et μ_L sur Σ_m^+, respectivement associées aux familles $\{W(w)\}_{w\in\Sigma_m^*}$ et $\{L(w)\}_{w\in\Sigma_m^*}$.

Supposons d'emblée que les variables W et L ont tous leurs moments finis. Alors, on sait d'après le théorème 5.13 que presque sûrement les mesures μ_W et μ_L n'ont pas d'atomes. On utilise alors μ_L pour définir la distance aléatoire

$$d_L(t, t') = \mu_L([t \wedge t']).$$

Le cas étudié dans la section 8.1 correspond à $L \equiv 1$. Il existe un intervalle maximal contenant $[0, 1]$ pour tout point q duquel l'équation

$$m\,\mathbb{E}((W/m)^q (L/m)^{-t}) = 1$$

définit de façon unique un nombre $\varphi_{W,L}(q)$, comme solution en t, de sorte que

$$\varphi_{W,L}(1) = 0.$$

La fonction $\varphi_{W,L}$ ainsi définie est concave et analytique. De plus, si $L \leq m$ presque sûrement, alors elle est clairement définie sur tout $\mathbb{R}$.

On établit que l'énoncé du théorème 8.1 est encore valable avec la nouvelle métrique d_L si l'on remplace φ par $\varphi_{W,L}$ (ce modèle symbolique permet de coder les mesures auto-similaires en loi sur $\mathbb{R}^d$. Pour des résultats d'analyse multifractale concernant ces mesures, on pourra consulter [**63, 1, 6, 7, 13**]).

Nous laissons ce point au lecteur et examinons la situation d'un point de vue un peu différent, qui rejoint celui de la fragmentation auto-similaire [**33**]. Nous supposons à présent

$$W \geq 1 \ \text{ et } \ \mathbb{P}(W > 1) > 0$$

et interprétons $\log W(w)$ comme le temps qu'il faut pour que le cylindre $[w]$ se subdivise en ses m fils (il ne s'agit plus d'utiliser W pour définir une mesure aléatoire). On assure ainsi que presque sûrement, pour tout $x \in \Sigma_m^+$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \log W(x|_k) = \infty.$$

On peut alors définir pour $t > 0$ et $x \in \Sigma_m^+$

$$n(x,t) = \inf \Big\{ n : \sum_{k=0}^{n-1} \log W(x|_k) \geq t \Big\}.$$

Le cylindre $[x|_n(x,t)]$, que nous noterons $\mathcal{C}_t(x)$ par commodité est appelé fragment contenant x à l'instant t, et il change de valeur le long de la suite d'instants

$$t_p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \log W(x|_k), \quad p \geq 1.$$

On décrit la façon dont évolue au cours du temps le diamètre $|\mathcal{C}_t(x)|_L$ de $\mathcal{C}_t(x)$ dans la métrique d_L en calculant la dimension de Hausdorff des ensembles

$$F(\alpha) = \Big\{ x \in \Sigma_m^+ : \lim_{t\to\infty} \frac{\log |\mathcal{C}_t(x)|_L}{t} = \alpha \Big\} \quad (\alpha \leq 0).$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$F(\alpha) = \Big\{ x \in \Sigma_m^+ : \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \log L(x|_k)}{\sum_{k=1}^n \log W(x|_k)} = \alpha \Big\}$$

et qu'on est essentiellement ramené au problème d'analyse multifractale précédent. Si l'on suppose $L \leq m$ et si l'on définit formellement $\varphi_{W,L}$ comme précédemment, alors on a le résultat suivant.

Théorème 8.4. — *Avec probabilité 1, pour tout $\alpha \leq 0$, on a* $\dim F(\alpha) = \varphi^*_{W,L}(1/\alpha)$ *si* $\varphi^*_{W,L}(1/\alpha) \geq 0$ *et* $F(\alpha) = \emptyset$ *sinon.*

9. Percolation et recouvrement

On établit le lien entre théorie du potentiel, percolation sur un arbre et T-martingales (sections 9.1 et 9.2). Puis on s'intéresse à la fréquence de recouvrement des points comme problème d'analyse multifractale dans le cadre de recouvrements du cercle et de la droite par des intervalles aléatoires. Cela met en oeuvre les cascades de Poisson composées comme outil (section 9.3). Enfin, on présente des résultats liés au recouvrement du cercle par des arcs engendrés par la dynamique $x \mapsto 2x$ relativement à une mesure de Gibbs (section 9.4).

9.1. Percolation sur un arbre. — Soit $\mathcal{T}$ un arbre infini et localement fini et $T = \partial\mathcal{T}$ son bord muni de la métrique $d(\xi, \eta) = e^{-|\xi\wedge\eta|}$ où $|\xi \wedge \eta|$ est le nombre de noeuds communs aux deux chemins infinis ξ et η appartenant à $\partial\mathcal{T}$.

Soit $\mathbf{p} = (p_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres tels que $0 < p_n \leq 1$. Chaque arête du niveau n de l'arbre $\mathcal{T}$ est gardée ou enlevée avec probabilité p_n et $1-p_n$ respectivement. On suppose que toutes les décisions sont prises indépendamment pour toutes les arêtes de tous les niveaux. Ce modèle s'appelle $\mathbf{p}$–*percolation de Bernoulli.* Si, avec une probabilité strictement positive, il reste un chemin infini émanant de la racine de l'arbre, on dit que la *percolation a lieu.*

Pour ce problème de percolation, on introduit le noyau

$$K(t,s) = K_{\mathbf{p}}(t,s) = \prod_{n=1}^{|t\wedge s|} \frac{1}{p_n}. \tag{89}$$

Le bord $\partial\mathcal{T}$ d'un arbre infini et localement fini $\mathcal{T}$ peut être plongé dans un goupe $G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_n}$. Le noyau K défini par (89) s'étend formellement à G. Le noyau prolongé, encore noté K, est invariant par translation dans le sens où $K(t+\tau, s+\tau) = K(t,s)$. Alors $K(t,s) = K(t-s)$, où

$$K(t) = \prod_{n=1}^{|t\wedge 0|} \frac{1}{p_n}.$$

Théorème 9.1 (**[68, 69]**). — *Le noyau $K(\cdot)$ est Haar-intégrable si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1\cdots p_n)(m_1\cdots m_n)} < \infty.$$

De plus, sous cette intégrabilité, on a $\gamma_n = \widehat{K}(n) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Supposons K Haar-intégrable. Rappelons (voir aussi le chapitre 5) que le *potentiel* et l'*énergie* (par rapport à K) d'une mesure de probabilité borélienne

μ sur G sont respectivement définis par

$$U^\mu(t) = \int K(t-s)\mathrm{d}\mu(s), \qquad I^\mu = \int U^\mu(t)\mathrm{d}\mu(t).$$

La *capacité* (par rapport à K) d'un compact E dans G est définie par $I(E)^{-1}$ avec $I(E) = \inf I^\mu$ où l'inf est pris sur toutes les mesures de probabilité portées par E.

Théorème 9.2 **([68, 69])**. — *Supposons K Haar-intégrable. Soit E un compact dans G.*

(1) *Si $I(E) < \infty$, alors il existe une unique mesure de probabilité μ_e portée par E telle que $I(E) = I^{\mu_e}$.*

(2) *L'ensemble des $t \in E$ tels que $U^{\mu_e}(t) < I(E)$ est de mesure nulle par rapport à toute mesure d'énergie finie.*

Théorème 9.3 **([68, 69, 161, 162])**. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la $\mathbf{p}$–percolation de Bernoulli ait lieu sur $\mathcal{T}$ est $\mathrm{Cap}_K \partial\mathcal{T} > 0$, où K est le noyau défini par* (89).

Preuve. Considérons les poids définis par

$$P_n(\xi) = \frac{\mathbf{1}_{\{\text{la } n\text{–ième arête de } \xi \text{ est gardée}\}}(\omega)}{p_n}. \tag{90}$$

Alors $Q_n(\xi) = \prod_{j=1}^n P_j(\xi) \neq 0$ signifie que les n premières arêtes de ξ sont gardées. Rappelons que $\mathrm{Cap}_K\partial\mathcal{T} > 0$ signifie qu'il existe une mesure de probabilité σ telle que $\sup_n \mathbb{E}(Q_n\sigma(T))^2 = M < \infty$. D'après l'inégalité de Paley-Zygmund, pour tout $0 < \delta < 1$, on a

$$P(Q_n\sigma(T) \geq \delta) \geq \frac{(1-\delta)^2}{\mathbb{E}(Q_n\sigma(T))^2} \geq \frac{(1-\delta)^2}{M} =: p_0 > 0,$$

d'où $P(\limsup_n Q_n\sigma(T) \geq \delta) \geq p_0$. Soit $C_n(\omega)$ l'ensemble des chemins dont les n premières arêtes sont gardées. Observons que $Q_n\sigma(T) > 0$ implique $C_n(\omega) \neq \emptyset$. Observons aussi que $C_{n+1}(\omega) \subset C_n(\omega)$. On en déduit finalement $P(\cap C_n(\omega) \neq \emptyset) \geq p_0$. Ainsi on a démontré que $\mathrm{Cap}_K\partial\mathcal{T} > 0$ est une condition suffisante pour la percolation.

Esquissons maintenant la preuve de la nécessité : $\mathrm{Cap}_K\partial\mathcal{T} = 0$ implique la non-percolation. Pour tout entier $N \geq 1$, considérons le noyau borné

$$K_N(t) = \prod_{n=1}^{\min(N,|t\wedge s|)} \frac{1}{p_n}.$$

D'une part, on a

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cap}_{K_N} \partial\mathcal{T} = \mathrm{Cap}_K \partial\mathcal{T} = 0;$$

d'autre part, selon le théorème 9.2, la mesure d'équilibre σ_N de $\partial\mathcal{T}$ relative au noyau K_N satisfait

$$\frac{1}{\mathrm{Cap}_{K_N}\partial\mathcal{T}} \leq \int K_N(t)\mathrm{d}\sigma_N(t+u), \quad \forall u \in \partial\mathcal{T}.$$

Soit R_N l'ensemble des chemins dont les arêtes à l'ordre N sont gardées. On a

$$\mathbb{E}\,\sigma_N(R_N) = \mathbb{E}\int 1_{R_N}(t)\mathrm{d}\sigma_N(t) = \int \mathbb{E}\,1_{R_N}(t)\mathrm{d}\sigma_N(t) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n}.$$

On peut calculer cette espérance d'une autre façon. Prenons une suite croissante d'ensembles finis Q_k telle que $\bigcup Q_k$ soit dense dans $\partial\mathcal{T}$. Rappelons qu'il existe un ordre sur $\partial\mathcal{T}$, appelé l'ordre lexicographique. Pour tout k, désignons par ξ le premier chemin dans Q_k dont les arêtes à l'ordre N sont gardées (par convention, $\xi_k = \infty$ s'il n'y a aucun tel chemin dans Q_k). Alors, d'après la formule de probabilité totale on a

$$\mathbb{E}\,\sigma_N(R_N) = \sum_{s\in Q_k\cup\{\infty\}} \int P(t \in R_N | \xi_k = s)P(\xi_k = s)\mathrm{d}\sigma_N(t).$$

En combinant les deux calculs de $\mathbb{E}\,\sigma_N(R_N)$, on peut déduire que

$$P(R_N \neq \emptyset) \leq \sup_{u\in\partial\mathcal{T}} \Big(\int K_N(t)\mathrm{d}\sigma_N(t+u)\Big)^{-1} \leq \mathrm{Cap}_{K_N}\partial\mathcal{T}.$$

(voir [**68, 69**] pour les détails). Laissons N tendre vers $+\infty$. On obtient que la percolation a lieu, à partir de la racine de l'arbre, avec probabilité nulle. □

On pourra également consulter [**194**] sur le sujet.

Dans le type de percolation auquel nous nous intéressons, on peut complètement caractériser l'image et le noyau de l'opérateur $\mathbb{E}\,Q$. Soit μ une mesure de Radon sur $\partial\mathcal{T}$. On dit que μ est K-régulière si μ peut s'écrire comme une somme de mesures d'énergie finie et on dit qu'elle est K-singulière si elle portée par un borélien de capacité nulle. Pour insister sur le rôle de $\mathbf{p}$, désignons par $Q_{\mathbf{p}}$ l'opérateur de chaos multiplicatif correspondant aux poids définis par (90).

Théorème 9.4 **([68, 69])**. — *Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial\mathcal{T})$ est $Q_{\mathbf{p}}$-régulière (resp. $Q_{\mathbf{p}}$-singulière) si et seulement si elle est K-régulière (resp. K-singulière).*

9.2. Une application du principe de décomposition. — En combinant le théorème 9.4 qui décrit le noyau et l'image de l'opérateur $\mathbb{E}\, Q_{\mathbf{p}}$, le critère de non-dégénérescnece (c'est-à-dire $\varphi(1^-) > 0$) dans [**138**] et le principe de décomposition (théorème 4.6), nous pouvons fournir une autre preuve de la partie du théorème 5.13 sur le calcul de dimension de la mesure μ dans le cas des cascades multiplicatives de Mandelbrot. Le plus intéressant est que l'on peut supprimer l'hypothèse que $\varphi(p) < -\infty$ pour un certain $p > 1$.

Rappelons que $\mu = Q\lambda$, où Q est l'opérateur des cascades multiplicatives de Mandelbrot associé à une variable W, à laquelle est associée la fonction

$$\varphi(q) = q - 1 - \log_m \mathbb{E}\, W^q$$

(voir la section 4.3). Il est clair que

$$\varphi'(1^-) = 1 - \mathbb{E}(W \log_m W).$$

Théorème 9.5 **([78], théorème A (d))**. — *Supposons que* $\varphi'(1^-) > 0$. *Avec probabilité 1,* $\dim_* \mu = \dim^* \mu = \varphi'(1^-)$.

Démonstration. Soit W_β une variable aléatoire telle que

$$P(W_\beta = m^\beta) = m^{-\beta}, \quad P(W_\beta = 0) = 1 - m^{-\beta}.$$

Soit Q_β l'opérateur associé à W_β défini sur Σ_m^+. Ce n'est rien d'autre que l'opérateur de percolation $Q_{\mathbf{p}}$ avec $p_n = m^{-\beta}$ sur l'arbre $\mathcal{T} = \Sigma_m^+$. Le noyau potentiel correspondant $K_{\mathbf{p}}$ est alors le noyau de Riesz

$$K_{\mathbf{p}} = \frac{1}{d_m(\xi, \eta)^\beta}$$

où d_m est la métrique naturelle sur Σ_m^+. On dira alors β-régulière et β-singulière au lieu de $K_{\mathbf{p}}$-régulière et $K_{\mathbf{p}}$-singulière.

Supposons que Q_β soit indépendant de Q. Selon le théorème 4.6, le produit $Q_\beta Q$ est associé à $W_\beta W$, et si λ est $Q_\beta Q$-régulière alors $Q\lambda$ est presque sûrement β-régulière, et si λ est $Q_\beta Q$-singulière alors $Q\lambda$ est presque sûrement β-singulière.

Remarquons que

$$\mathbb{E}(W_\beta W \log(W_\beta W) = \mathbb{E}\, W \log W + \beta \log m.$$

Pour tout β tel que $\mathbb{E}\, W \log W + \beta \log m < \log m$ c'est-à-dire

$$\beta \log m < \log m - \mathbb{E}\, W \log W,$$

λ est $Q_\beta Q$-régulière, donc $Q\lambda$ est Q_β-régulière presque sûrement (théorère 4.6), d'où $\dim Q\lambda \geq \beta$ presque sûrement (théorème 9.4). On en déduit que presque sûrement

$$\dim_* Q\mu \geq 1 - \mathbb{E}\, W \log_m W).$$

Pour tout β tel que

$$\beta \log m > \log m - \mathbb{E}\, W \log W,$$

λ est $Q_\beta Q$-singulière, donc $Q\lambda$ est Q_β-singulière presque sûrement, d'où $\dim Q\lambda \leq \beta$ presque sûrement. On en déduit que presque sûrement

$$\dim^* Q\lambda \leq 1 - \mathbb{E}\, W \log_m W.$$

□

Le cas où λ est remplacée par une mesure de Markov est traité dans [**78**].

9.3. Recouvrement aléatoire. — Nous nous intéressons aux recouvrements aléatoires du cercle et de la droite tels qu'ils ont été définis respectivement par A. Dvoretzky [**56**] et B. Mandelbrot [**165**]. Ces recouvrements soulèvent naturellement des questions d'analyse multifractale qui sont intimement liées aux **T**-martingales.

9.3.1. **Recouvrement de Dvoretzky du cercle.** — Dans le problème de Dvoretzky [**56**], on se donne $(\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires uniformes et indépendantes dans $\mathbb{T}$ ainsi que $(\ell_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels décroissant vers 0. On pose alors la question de savoir à quelle condition sur $(\ell_n)_{n\geq 1}$ on a $\limsup_{n\to\infty}(\omega_n, \omega_n + \ell_n) = \mathbb{T}$ presque sûrement. La réponse à cette question a été donnée par L. Shepp dans [**207**] (voir aussi [**131**] Ch. 11 et [**136**]).

Théorème 9.6. — [**207**] *On a* $\limsup_{n\to\infty}(\omega_n, \omega_n + \ell_n) = \mathbb{T}$ *presque sûrement si et seulement si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \exp\left(\ell_1 + \cdots + \ell_n\right) = \infty.$$

Nous nous intéressons, dans le cas $\sum_{n\geq 1} \ell_n = \infty$ qui contient des cas de non recouvrement presque sûr de $\mathbb{T}$, aux nombres (aléatoires) de recouvrements $N_n^D(t)$ définis pour chaque $t \in (0,1)$ par le nombre d'arcs $(\omega_k, \omega_k + \ell_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ recouvrant t :

$$N_n^D(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{(0,\ell_k)\}}(t - \omega_k). \tag{91}$$

On s'attend à ce que $N_n^D(t)$ soit de l'ordre du nombre moyen d'intervalles parmi les n premiers ayant recouvert t, c'est à dire

$$N_n^D(t) \approx L_n = \sum_{k=1}^n \ell_k,$$

et l'on souhaite décrire précisément le comportement asymptotique ponctuel de $N_n^D(t)$. On considère donc naturellement les ensembles de niveau définis pour $\beta \geq 0$ par

$$\underline{F}_\beta^D = \left\{ t : \liminf_{n\to\infty} \frac{N_n^D(t)}{L_n} = \beta \right\}, \ \overline{F}_\beta^D = \left\{ t : \limsup_{n\to\infty} \frac{N_n^D(t)}{L_n} = \beta \right\},$$

et

$$F_\beta^D = \underline{F}_\beta^D \bigcap \overline{F}_\beta^D,$$

et on cherche leurs dimensions de Hausdorff. Des résultats préliminaires dans le cas $\ell_n = \alpha/n$ sont établis dans [**83**] et [**79**].

Pour énoncer les résultats obtenus dans [**11**], nous avons besoin des fonctions

$$d_\alpha(\beta) = 1 + \alpha(\beta - 1 - \beta \log \beta) \tag{92}$$

définies pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

Nous avons aussi besoin de définir les nombres

$$\overline{\alpha}^D = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n \ell_j}{-\log \ell_n} \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha}^D = \inf_{m\geq 2} \limsup_{n\to\infty} \sup_{p\geq 1} \frac{\sum_{\ell_j \in [m^{-(n+p)}, m^{-n}]} \ell_j}{\log m^p}$$

(où $m \geq 2$ décrit les entiers ≥ 2). Ces quantités mesurent la vitesse et la régularité avec lesquelles ℓ_n converge vers 0 ou encore L_n croît vers l'infini.

Les alternatives suivantes sont mises en évidence dans [**11**].

Théorème 9.7 **(Cas** $\overline{\alpha}^D = 0$**).** — *Supposons* $\limsup_{n\to\infty} n\ell_n < \infty$ *et* $\overline{\alpha}^D = 0$. *Avec probabilité 1, pour tout* $\beta \geq 0$ *tel que* $d_{\widehat{\alpha}^D}(\beta) > 0$ *on a*

$$\dim(F_\beta^D) = \dim(\underline{F}_\beta^D) = \dim(\overline{F}_\beta^D) = 1. \tag{93}$$

Théorème 9.8 **(Cas** $0 < \overline{\alpha}^D < \infty$**).** — *Supposons que* $\limsup_{n\to\infty} n\ell_n < \infty$ *et que* $0 < \overline{\alpha}^D < \infty$. *Avec probabilité 1, pour tout* $\beta \geq 0$ *tel que* $d_{\widehat{\alpha}^D}(\beta) > 0$, *on a*

$$\dim(F_\beta^D) = d_{\overline{\alpha}^D}(\beta) \tag{94}$$

$$F_\beta^D = \emptyset \quad (\forall \beta \geq 0, \ d_{\overline{\alpha}^D}(\beta) < 0). \tag{95}$$

De plus, si $\overline{\alpha}^D$ *est défini comme une limite (et pas simplement une limsup), alors (94) et (95) sont vraies si* F_β^D *est remplacé par* $\underline{F}_\beta^D$ *ou* $\overline{F}_\beta^D$.

Théorème 9.9 **(Cas $\overline{\alpha}^D = +\infty$).** — *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} n\ell_n = \infty$. *Alors, avec probabilité 1, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^D(t)}{\sum_{k=1}^n \ell_k} = 1 \quad (\forall\ t \in \mathbb{T}).$$

Divers exemples de suites $(\ell_n)_{n\geq 1}$ sont donnés dans [**11**]. On voit s'opérer les transitions d'un comportement à l'autre en considérant les suites de la forme

$$\alpha/n\log^\beta(n+1)\ (\beta\in(0,1]),\quad \alpha/n,\quad \alpha/n\log^\beta(n+1)\ \ (\beta<0).$$

L'approche utilisée dans [**11**] repose sur une réduction non triviale de la question de la fréquence du recouvrement des points dans le recouvrement de Dvoretzky à la question analogue qui se pose pour le recouvrement poissonien de la droite. Nous décrivons ce recouvrement dans la section suivante ainsi que l'idée qui permet de ramener le premier problème au second.

9.3.2. **Recouvrement poissonien et chaos multiplicatif.** — Dans le problème du recouvrement poissonnien de la droite introduit dans [**165**], on se donne un processus de Poisson S dans le demi-plan supérieur d'intensité $\ell\otimes\nu$, où ℓ est la mesure de Lebesgue et ν est une mesure de Borel positive sur $(0,\infty]$, localement finie. On demande alors à quelle condition nécessaire et suffisante on a $(0,\infty) = \bigcup_{(s,\ell)\in S}(s, s+\ell)$ presque sûrement. Cette question est résolue partiellement dans [**165**] et complètement dans [**208**] (voir aussi [**135**]).

Théorème 9.10. — [**208**] *On a* $(0,\infty) = \bigcup_{(s,\ell)\in S}(s, s+\ell)$ *presque sûrement si et seulement si*

$$\int_0^1 dx \exp \int_x^\infty \nu\big((y,\infty)\big)\, dy = \infty.$$

L'analogue du problème de fréquence de recouvrement considéré dans la section précedente est le suivant. D'abord, on considère le cas où les intervalles poissoniens sont de longueurs uniformément bornées en imposant par exemple que $\nu((1,\infty)) = 0$, et on étudie alors, lorsque $\nu\big((0,1]\big) = \infty$, le recouvrement de $\mathbb{R}$ par les intervalles $(s, s+\ell)$, $(s,\ell)\in S$. Ici, les nombres de recouvrements sont naturellement définis par

$$N_\varepsilon^P(t) = \sum_{\substack{(s,\ell)\in S\\ \ell\geq\varepsilon}} \mathbf{1}_{\{(s,s+\ell)\}}(t) \quad (\varepsilon > 0), \tag{96}$$

dont la moyenne n'est autre que

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \ell \mathrm{d}\nu(\ell).$$

Etant donnée l'invariance,en loi, par translation de la construction, on travaille sur $[0,1]$. Si l'on fixe un poids constant $w > 0$ distinct de 1, le comportement asymptotique de $N_\varepsilon^P(t)/\mathcal{N}_\varepsilon$ se déduit de celui de $\log Q_\varepsilon(t)/\mathcal{N}_\varepsilon$, où $Q_\varepsilon(t)$ est la $[0,1]$-martingale en temps continu

$$Q_\varepsilon(t) = e^{-(w-1)\mathcal{N}_\varepsilon} w^{N_\varepsilon(t)} \quad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

considérée en temps discret sous la forme

$$\widetilde{Q}_n(t) = Q_{m^{-n}}(t)$$

dans la section 4.3.2, et ce dans un cadre plus général.

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, posons

$$\underline{F}_\beta = \Big\{ t \in [0,1] : \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{N}_\varepsilon} = \beta \Big\},$$

$$\overline{F}_\beta = \Big\{ t \in [0,1] : \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{N}_\varepsilon} = \beta \Big\}$$

et

$$F_\beta = \underline{F}_\beta \bigcap \overline{F}_\beta.$$

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on note μ_γ la mesure limite de la martingale $\dfrac{\widetilde{Q}_n^\gamma}{\mathbb{E}(\widetilde{Q}_n^\gamma)} \cdot \lambda$. Nous supposerons que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{N}_\varepsilon = +\infty.$$

Soit

$$\overline{\alpha} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{N}_\varepsilon(t)}{-\log \varepsilon}$$

et

$$\widehat{\alpha} = \inf_{m \geq 2} \limsup_{n \to \infty} \sup_{p \geq 1} \frac{\ell \otimes \nu(\mathcal{C}_{m^{-(n+p)}}(t) \setminus \mathcal{C}_{m^{-n}}(t))}{\log m^p}$$

(on a $\overline{\alpha} \leq \widehat{\alpha}$). Enfin, soit

$$\theta(\gamma) = w^\gamma - 1 - \gamma(w-1), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

et

$$\Lambda_\alpha(\gamma) = 1 + \alpha\big(\theta(\gamma) - \gamma\theta'(\gamma)\big), \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Les résultats de la section précédente ont les analogues suivants [**11**].

***Théorème 9.11* (Cas $\overline{\alpha} = 0$).** — *Supposons que l'on a*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\nu\big([\varepsilon,1)\big) < \infty \quad \textit{et} \quad \overline{\alpha} = 0.$$

Avec probabilité 1, les mesures μ_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$, sont définies simultanément, non nulles, et chaque μ_γ est concentrée sur $F_{\theta'(\gamma)}$ (en particulier les mesures μ_γ sont mutuellement singulières) ; si de plus $\Lambda_{\hat{\alpha}}(\gamma) > 0$, on a $\dim_*(\mu_\gamma) = 1$ et donc

$$\dim F_{\theta'(\gamma)} = \dim \underline{F}_{\theta'(\gamma)} = \dim \overline{F}_{\theta'(\gamma)} = 1.$$

***Théorème 9.12* (Cas $0 < \overline{\alpha} < \infty$).** — *Supposons*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\nu([\varepsilon,1)) < \infty \quad \textit{et} \quad 0 < \overline{\alpha} < \infty.$$

Avec probabilité 1, les mesures μ_γ, $\Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma) > 0$, sont définies simultanément, non nulles, et si $\Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma) > 0$ alors μ_γ est concentrée sur $F_{\theta'(\gamma)}$ (en particulier ces mesures μ_γ sont mutuellement singulières) et $\dim F_{\theta'(\gamma)} \leq \Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma)$; pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma) < 0$ on a $F_{\theta'(\gamma)} = \emptyset$.

De plus, avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_{\hat{\alpha}}(\gamma) > 0$, on a $\dim_*(\mu_\gamma) \geq \Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma)$, et donc $\dim F_{\theta'(\gamma)} = \Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma)$.

Si $\overline{\alpha}$ est obtenu comme une limite et non seulement comme une lim sup, *alors les résultats précédents restent valables si l'on remplace $F_{\theta'(\gamma)}$ par $\underline{F}_{\theta'(\gamma)}$ ou $\overline{F}_{\theta'(\gamma)}$.*

***Théorème 9.13* (Cas $\overline{\alpha} = +\infty$).** — *Supposons*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\,\nu([\varepsilon,1)) = +\infty.$$

Alors, avec probabilité 1, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{N}_\varepsilon} = \theta'(0) \quad (\forall\ t \in \mathbb{R}).$$

Lien avec le recouvrement de Dvoretzky. Pour obtenir les résultats de la section précédente, on exploite l'idée ingénieuse introduite dans [**166**] pour comparer le problème de recouvrement de Dvoretzky à celui du recouvrement poissonien. L'idée est d'introduire les suites $(\ell'_n)_{n\geq 1}$ et $(\ell''_n)_{n\geq 1}$ définies respectivement par $\ell'_n = \ell_{m(m+1)/2}$ et $\ell''_n = \ell_{m(m-1)/2+1}$ pour $m \geq 1$ et $n \in [m(m-1)/2+1, m(m+1)/2]$. Quand ℓ_n décroît suffisamment lentement vers 0, alors : (i) d'une part les problèmes de recouvrements associés respectivement aux arcs $(\omega_n, \omega_n + \ell_n)$, $(\omega_n, \omega_n + \ell'_n)$ et $(\omega_n, \omega_n + \ell''_n)$ sont comparables entre eux ; (ii) d'autre part on peut injecter les recouvrement du cercle par les $(\omega_n, \omega_n + \ell'_n)$ et les $(\omega_n, \omega_n + \ell''_n)$ dans le problème de recouvrement poissonien associé à la mesure $\nu = \sum_{m\geq 1} m\delta_{\ell_{m(m+1)/2}}$ auquel il sont également comparables car les suites $(\ell'_n)_{n\geq 1}$ et $(\ell''_n)_{n\geq 1}$ sont suffisamment redondantes. Rendre mathématiquement précise cette comparaison est non trivial (voir [**11**], et également [**136**] pour une preuve du théorème de Shepp exploitant cette idée).

Quelques idées pour les démonstrations des théorèmes 9.11, 9.12 et 9.13. Dans les théorèmes 9.11 et 9.12, la convergence simultanée des mesures $\widetilde{Q}_n^\gamma\cdot\lambda/\mathbb{E}(\widetilde{Q}_n^\gamma)$, $\gamma\in\Lambda_{\overline{\alpha}}^{-1}((0,\infty))$ vers des mesures non dégénérées suit une approche analogue à celle utilisée dans la preuve de la proposition 8.3, en exploitant la condition **(P2)** (voir par exemple [**8**], [**11**] ou [**15**]).

Chaque mesure μ_γ satisfait une propriété analogue à (80) : pour tout entier $m\geq 2$, pour tout $w\in\Sigma_m^*$, t_w désignant l'extrémité gauche de I_w, on a

$$\begin{aligned}\mu_\gamma(I_w) &\approx m^{-|w|}\frac{Q^\gamma_{m^{-|w|}}(t_w)}{\mathbb{E}(Q^\gamma_{m^{-|w|}})}Y_\gamma(w)\\ &= m^{-|w|}Q^\gamma_{m^{-|w|}}(t_w)\exp\big(-\theta(\gamma)\mathcal{N}_{m^{-|w|}}\big)Y_\gamma(w),\end{aligned}\tag{97}$$

où $Y_\gamma(w)$ est la limite de la martingale

$$Y_{\gamma,n}(w)=\Big\|\frac{(Q_{m^{-|w|-n}}/Q_{m^{-|w|}})^\gamma\circ S_{I_w}}{\mathbb{E}\left((Q_{m^{-|w|-n}}/Q_{m^{-|w|}})^\gamma\right)}\cdot\lambda\Big\|.$$

En l'absence d'auto-similarité pour le processus de Poisson (i.e. $\nu(\mathrm{d}\lambda)\neq\alpha\mathrm{d}\lambda/\lambda^2$, on a besoin de la condition $\Lambda_{\widehat{\alpha}}(\gamma)>0$ pour avoir un contrôle uniforme d'un moment d'ordre $p>1$ de tous les $Y_\gamma(w)$. On peut alors négliger les termes de la forme $\log(Y_{\gamma,n}(w))/n$ dans l'estimation de la dimension de μ_γ.

Minoration des dimensions des ensembles $F_{\theta'(\gamma)}$. Nous allons donner une idée de la façon dont on prouve que μ_γ est portée par $F_{\theta'(\gamma)}$ et $\dim_*(\mu_\gamma)\geq\Lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma)$. Pour simplifier le discours, nous supposerons

$$\overline{\alpha}=\widehat{\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{N}_\varepsilon}{-\log\varepsilon}<\infty.\tag{98}$$

Nous désignons simplement $\overline{\alpha}$ par α, et commençons par indiquer pourquoi μ_γ est portée par $F_{\theta'(\gamma)}$.

Pour tout entier $k\geq 1$, soit $n_k=\inf\{n:\mathcal{N}_{2^{-n}}\geq k\log 2\}$. On pose $\varepsilon_k=2^{-n_k}$. Pour $\gamma\in\mathbb{R}$, $k\geq 1$ et $\eta>0$ on s'intéresse aux ensembles

$$\begin{aligned}F^+(k,\gamma,\eta) &= \Big\{t\in[0,1]:\log Q_{\varepsilon_k}(t)\geq(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\Big\}\\ F^-(k,\gamma,\eta) &= \Big\{t\in[0,1]:\log Q_{\varepsilon_k}(t)\leq(\theta'(\gamma)-\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\Big\}.\end{aligned}$$

Si l'on montre que pour tout $\eta > 0$, presque sûrement, pour tout γ on a

$$\sum_{k\geq 1} \mu_\gamma(F^+(k,\gamma,\eta) + \mu_\gamma(F^-(k,\gamma,\eta) < \infty, \tag{99}$$

alors le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que μ_γ est portée par $\left\{t \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \frac{\log Q_{\varepsilon_k}(t)}{\mathcal{N}_{\varepsilon_k}} = \theta'(\gamma)\right\}$. Mais comme $\mathcal{N}_{\varepsilon_k} \sim \mathcal{N}_{\varepsilon_{k+1}}$ et $N_\varepsilon(t)$ est croissante, par définition de $Q_\varepsilon(t)$ cet ensemble est égal à $F_{\theta'(\gamma)}$.

Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mu_\gamma(F^+(k,\gamma,\eta)) \leq \int Q_{\varepsilon_k}(t)^\delta \exp(-\delta(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k})\, \mathrm{d}\mu_\gamma(t).$$

En admettant ici que $Q_{\varepsilon_k}(t)$ est quasi constant sur chaque intervalle dyadique de génération n_k et en utilisant (97) avec $m = 2$ on obtient

$$\begin{aligned}\mu_\gamma(F^+(k,\gamma,\eta)) &\preceq \sum_{w\in\Sigma_2^{n_k}} Q_{\varepsilon_k}(t_w)^\delta \exp\big(-\delta(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big)\mu_\gamma(I_w)\\ &\preceq \sum_{w\in\Sigma_2^{n_k}} Q_{\varepsilon_k}^{\gamma+\delta}(t_w) \exp\big(-(\theta(\gamma)+\delta(\theta'(\gamma)+\eta))\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big)\varepsilon_k Y_\gamma(w),\end{aligned}$$

le symbole $\preceq$ signifiant ici, et dans la suite, "à un terme multiplicatif près qui n'influe pas sur le résultat".

L'espérance du terme de droite est $\exp\big(\theta(\gamma+\delta)-(\theta(\gamma)+\delta(\theta'(\gamma)+\eta))\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big)$, qui pour δ assez petit est un $O(\exp(-\eta\delta\mathcal{N}_{\varepsilon_k}/2))$, et $O(\exp(-\eta\delta\mathcal{N}_{\varepsilon_k}/2)) = O(2^{-k\eta\delta/2})$ par construction de ε_k. Donc, $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\,\mu_\gamma(F^+(k,\gamma,\eta)) < \infty$. Le même résultat est vrai avec $F^+(k,\gamma,\eta)$. Donc, pour chaque γ tel que μ_γ est bien définie (i.e., $\Lambda_\alpha(\gamma) > 0$), (87) a lieu presque sûrement.

On peut améliorer ceci et montrer que (99) a lieu pour tout $\eta > 0$, presque sûrement pour chaque γ tel que $\Lambda_\alpha(\gamma) > 0$. Pour cela, on exploite l'estimation de $\mu_\gamma(F^+(k,\gamma,\eta))$ précédente en suivant une démarche analogue, bien que beaucoup plus technique, à celle adoptée dans la preuve de la proposition 8.4.

Une fois que l'on sait que μ_γ est portée par $F_{\theta'(\gamma)}$, en admettant ici que les termes de la forme $\log(Y_{\gamma,n}(w))/n$ n'influent pas sur la minoration de la dimension inférieure de μ_γ, on obtient en utilisant (97) que μ_γ-presque partout,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log \mu_\gamma(I_k(t))}{-k\log 2} \geq \Lambda_\alpha(\gamma).$$

Majoration des dimensions des ensembles $F_{\theta'(\gamma)}$. La majoration des dimensions est triviale quand $\overline{\alpha} = 0$.

Examinons le cas $0 < \overline{\alpha} < \infty$ en assumant encore (98). Pour $k \geq 1$, nous désignons 2^{-k} par ε_k. Si $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $k \geq 1$, posons

$$\begin{aligned} G^-(k,\gamma,\eta) &= \Big\{t \in [0,1] : \log Q_{\varepsilon_k}(t) \leq (\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\Big\} \\ G^+(k,\gamma,\eta) &= \Big\{t \in [0,1] : \log Q_{\varepsilon_k}(t) \geq (\theta'(\gamma)-\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\Big\}. \end{aligned}$$

puis pour $n \geq 1$

$$E^+(n,\gamma,\eta) = \bigcap_{k\geq n} G^+(k,\gamma,\eta) \quad \text{et} \quad E^-(n,\gamma,\eta) = \bigcap_{k\geq n} G^-(k,\gamma,\eta).$$

Alors

$$F_{\theta'(\gamma)} \subset \bigcup_{n\geq 1} E^+(n,\gamma,\eta) \bigcap \bigcup_{n\geq 1} E^-(n,\gamma,\eta). \tag{100}$$

On montre que lorsque γ tend vers 0, $\sup_{n\geq 1} \dim\, E^+(n,\gamma,\eta) \leq \Lambda_\alpha(\gamma) + o(1)$ si $\gamma \geq 0$ et $\sup_{n\geq 1} \dim\, E^-(n,\gamma,\eta) \leq \Lambda_\alpha(\gamma) + o(1)$ sinon. D'après (100), ceci est suffisant pour conclure que $\dim F_{\theta'(\gamma)} \leq \Lambda_\alpha(\gamma)$, une dimension strictement négative signifiant que l'ensemble $F_{\theta'(\gamma)}$ est vide.

Suppons $\gamma \geq 0$ et fixons $n \geq 1$. Pour tout $k \geq n$, on peut recouvrir $E^+(n,\gamma,\eta)$ par la réunion intervalles dyadiques de génération k qui l'intersectent. Notons $\{I_{k,l}\}$ cette famille, et fixons $t_l \in I_{k,l} \cap E^+(n,\gamma,\eta)$. En admettant ici que Q_{ε_k} est quasi constant sur chaque $I_{k,l}$, si $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_l |I_{k,l}|^s &\leq \sum_l |I_{k,l}|^s \exp\big(-\gamma(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big) Q_{\varepsilon_k}(t_l)^\gamma \\ &\preceq \sum_{w\in\Sigma_2^k} 2^{-ks} \exp\big(-\gamma(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big) Q_{\varepsilon_k}(t_w)^\gamma. \end{aligned}$$

L'espérance du terme de droite est $2^{(1-s)k} \exp\big((\theta(\gamma)-\gamma(\theta'(\gamma)+\eta)\mathcal{N}_{\varepsilon_k}\big)$. Donc, si $s > 1+\big(\theta(\gamma)-\gamma(\theta'(\gamma)+\eta)\big)\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_{\varepsilon_k}/\log(2^k)$, i.e. si $s > 1+\Lambda_\alpha(\gamma)+\alpha\gamma\eta$, alors presque sûrement on a exhibé une suite de recouvrements de plus en plus fins qui assurent que $\dim\, E^+(n,\gamma,\eta) \leq s$. Ceci étant vrai pour tout tel s et tout $\eta > 0$, comme ces derniers peuvent être choisis dans une famille dénombrable, on obtient la bonne majoration de $\dim F_{\theta'(\gamma)}$ pour γ fixé presque sûrement.

On procède de même pour $\gamma < 0$.

En fait, on a obtenu mieux : il existe une suite $(\gamma_p)_{p\geq 1}$ dense dans l'intervalle $\{\gamma : \Lambda_\alpha(\gamma) \geq 0\}$ et des suites strictement positives $(\eta_p)_{p\geq 1}$ et $(\delta_p)_{p\geq 1}$ convergeant vers 0 telles que presque sûrement, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\sup_{n\geq 1} \dim\, E^+(n,\gamma_p,\eta_p) \leq \Lambda_\alpha(\gamma_p) + \delta_p \ \text{ si } \ \gamma_p \geq 0$$

$$\sup_{n\geq 1} \dim\, E^-(n,\gamma_p,\eta_p) \leq \Lambda_\alpha(\gamma_p)+\delta_p \quad \text{sinon.}$$

Donc, presque sûrement, pour tout $\gamma \in \{\gamma : \Lambda_\alpha(\gamma)\geq 0\}$, en considérant une sous-suite $(\gamma_{p_j})_{j\geq 1}$ de $(\gamma_p)_{p\geq 1}$ qui converge vers γ (par dessous si $\gamma \geq 0$ et par dessus sinon) comme $F_{\theta'(\gamma)} \subset \bigcap_{j\geq 1}\bigcup_{n\geq 1} E^{\operatorname{sgn}(\gamma)}(n,\gamma_{p_j},\eta_{p_j})$, on a la bonne estimation.

Il reste le cas $\overline{\alpha}=+\infty$. Pour tout $\eta>0$ et $n\geq 1$, soit

$$\begin{aligned} E^-(n,\eta) &= \bigcap_{k\geq n} \Big\{t\in[0,1] : \frac{\log Q_{2^{-k}}(t)}{\mathcal{N}_{2^{-k}}} \leq \theta'(0)-\eta\Big\} \\ E^+(n,\eta) &= \bigcap_{k\geq n} \Big\{t\in[0,1] : \frac{\log Q_{2^{-k}}(t)}{\mathcal{N}_{2^{-k}}} \geq \theta'(0)+\eta\Big\}. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que presque sûrement $E^-(n,\eta)$ et $E^+(n,\eta)$ sont vides.

Considérons pour $k\geq 1$ la partie entière p_k de $\log_2 \nu([2^{-k},1])$. Alors, on sait montrer que $Q_{2^{-k}}(t)$ est quasi constant sur les intervalles dyadiques de génération p_k, et de plus on a $\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_{2^{-k}}/\log(2^{p_k})=+\infty$. Soit $s\in\mathbb{R}$. En recouvrant $E^-(n,\eta)$ par des intervalles dyadiques de génération p_k, $k\geq n$, on obtient un recouvrement $\{I_{k,l}\}$ tel que pour tout $\delta>0$ on ait

$$\begin{aligned} \sum_l |I_{k,l}|^s &\leq \sum_l |I_{k,l}|^s \exp\big(\delta(\theta'(0)-\eta)\mathcal{N}_{2^{-k}}\big) Q_{2^{-k}}(t_l)^{-\delta} \\ &\preceq \sum_{w\in\Sigma_2^{p_k}} 2^{-p_k s}\exp\big(\delta(\theta'(0)-\eta)\mathcal{N}_{2^{-k}}\big) Q_{2^{-k}}(t_w)^{-\delta}. \end{aligned}$$

Cette fois, l'espérance du terme de droite est

$$2^{(1-s)p_k}\exp\big(\delta(\theta'(0)-\eta)-\theta(-\delta))\mathcal{N}_{2^{-k}}\big) = O\big(2^{(1-s)p_k}\exp\big(-\delta\eta\mathcal{N}_{2^{-k}}/2\big)\big)$$

pour δ assez petit. Comme $\lim_{k\to\infty}\mathcal{N}_{2^{-k}}/\log(2^{p_k})=+\infty$, on en déduit que $\lim_{k\to\infty}\sum_l |I_{k,l}|^s = 0$ y compris si $s<0$. Donc $E^-(n,\eta)$ est vide presque sûrement. On montre de façon identique qu'il en est de même de $E^+(n,\eta)$.

9.4. Recouvrement dynamique. — Considérons la dynamique sur $\mathbb{T}$ définie par l'application

$$Tx = 2x \; (\mod 1)$$

et une mesure de Gibbs μ_ϕ associée à un potentiel höldérien. Au lieu de considérer le recouvrement aléatoire de Dvoretzky dont les centres d'intervalles $\{\omega_n\}$ sont supposés indépendants, nous considérons le recouvrement dynamique dont les centres sont les différentes positions $T^n x$ de l'orbite de x. Etant donné d'autre part une suite $\{r_n\} \subset I\!R^+$, nous considérons les intervalles

$$J_n(x) = (T^n x - r_n \pmod 1, T^n x + r_n \pmod 1).$$

On s'intéresse, pour les points μ_ϕ-génériques x, aux ensembles

$$I(x, \{r_n\}) = \limsup_{n\to\infty} J_n(x), \qquad F(x, \{r_n\}) = \mathbb{T} \setminus I(x, \{r_n\}).$$

La questions analogue à celle posée par Dvoretzky dans le problème de recouvrement est de savoir pour quelles suites $\{r_n\}$ on a $\mathbb{T} = I(x, \{r_n\})$ pour μ_ϕ-presque tout x. Dans le cas où $\mathbb{T} \neq I(x, \{r_n\})$, il est naturel de se poser des questions sur $I(x, \{r_n\})$ et $F(x, \{r_n\})$, sur leurs tailles par exemple. Si r_n prend la forme $n^{-\kappa}$ ($\kappa > 0$), des réponses satisfaisantes à ces questions ont été obtenues dans [**90**].

Sans perte de généralité, on suppose que ϕ est normalisé, i.e. la pression $P(\phi)$ est nulle. Soit $E_{-\phi}(t)$ le spectre multifractal de la somme de Birkhoff de $-\phi$ (c'est-à-dire de l'entropie locale de μ_ϕ) :

$$E_{-\phi}(t) = \dim \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-\phi)(T^j x) = t \right\}. \tag{101}$$

Les réponses seront liées aux quantités

$$e^- = \inf_{\nu \in \mathcal{M}(T)} \int (-\phi) \mathrm{d}\nu, \tag{102}$$

$$e_{\max} = \int (-\phi) \mathrm{dLeb}, \tag{103}$$

$$e^+ = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(T)} \int (-\phi) \mathrm{d}\nu \tag{104}$$

où e_- et e_+ sont respectivement l'entropie minimale et maximale locale de μ_ϕ, et $\mathcal{M}(T)$ est l'ensemble des mesures de probabilité T-invariantes.

Théorème 9.14. — *Si $\frac{1}{\kappa} > e^+$, alors $I(x, \{n^{-\kappa}\}) = \mathbb{T}$ pour μ_ϕ-presque tout x ; si $\frac{1}{\kappa} < e^+$, alors $I(x, \{n^{-\kappa}\}) \neq \mathbb{T}$ pour μ_ϕ-presque tout x.*

Ce résultat correspond à un résultat de Kahane-Billard pour le recouvrement aléatoire (on pourrait dire que $e^+ = e^- = 1$), un résultat antérieur à celui de Shepp cité précédemment (théorème 9.6).

Théorème 9.15. — *Pour μ_ϕ-presque tout x on a*

$$\dim F(x, \{n^{-\kappa}\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{\kappa} \le e_{\max} \\ E_{-\phi}(\frac{1}{\kappa}) & \text{si } \frac{1}{\kappa} > e_{\max} \end{cases}.$$

Théorème 9.16. — *Pour μ_ϕ-presque tout x on a*

$$\dim I(x, \{n^{-\kappa}\}) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} & \text{si } \frac{1}{\kappa} \le h_{\mu_\phi} \\ E_{-\phi}(\frac{1}{\kappa}) & \text{si } h_{\mu_\phi} < \frac{1}{\kappa} < e_{\max} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{\kappa} \ge e_{\max} \end{cases}.$$

La partie concernant le cas $\frac{1}{\kappa} \le h_{\mu_\phi}$ dans le théorème 9.16 est essentiellement un "mass transference principle" pour les mesures de Gibbs qui sont multifractales. Un tel principe a été obtenu pour des mesures monofractales [**32**] (voir aussi [**20, 22, 57**] pour des travaux sur l'ubiquité hétérogène). La contrepartie du théorème 9.16 pour le recouvrement aléatoire a été obtenue dans [**91, 92**] et celle pour la dynamique des rotations irrationnelles dans [**42, 211**].

L'étude de recouvrement dynamique envisagée ci-dessus est étroitement liée à la fonction d'entropie locale de la mesure de Gibbs μ_ϕ et au temps d'atteinte

$$\tau(x, C) = \inf\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in C\}$$

où C est un intervalle. Nous établissons un résultat clé qui repose sur la propriété de quasi-bernoullicité forte des mesures de Gibbs (voir section 3.2.1).

Lemme 9.1. — *Soit $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et posons $K = \lfloor 2^{an} \rfloor$, $L = \lfloor 2^{bn} \rfloor, N = \lfloor 2^{cn} \rfloor$. Soit $a > \gamma > \max(b - c, 0)$ et $\lambda > 0$. Fixons L intervalles dyadiques de génération n : $C_1, \cdots, C_L$.*

(1) *Supposons que $\mu_\phi(C_i) \ge 2^{-(a-\gamma)n}$. Alors pour tout n suffisamment grand on a*

$$\mu_\phi\{x : \exists C \in \{C_i\} \text{ tel que } \tau(x, C) > K\} \le 2^{-\lambda n}.$$

(2) *Supposons que $\mu_\phi(C_i) \le 2^{-(a+\gamma)n}$. Alors pour n suffisamment grand on a*

$$\mu_\phi\{x : \tau_n(x, C_i) \le K \textit{ pour } N \textit{ différent intervalles parmi les } C_i\} \le 2^{-\lambda n}.$$

Démonstration. Nous montrons seulement (1). Pour une preuve complète du lemme, voir [**90**]. Comme $e^- = \min_{\mu \text{ inv}} \int(-\phi)d\mu > 0$, on peut choisir le nombre ω dans le théorème 3.2 tel que $\beta^\omega < 2^{-e^-}$, où le nombre $0 < \beta < 1$ est celui dans le théorème 3.2. Soit $d = d(n) = \omega n$ et $m = \lfloor K/(1 + \omega)n \rfloor - 1$. Nous avons L possibilités pour l'intervalle C. Fixons un choix C parmi ces L

intervalles et notons par $D_0, \ldots, D_m$ une famille quelconque de m intervalles dyadiques de génération n (ils peuvent se répéter), qui sont disjoints de C.

Pour l'intervalle fixé C, soit G_C l'ensemble des points $x \in \mathbb{T}$ tels que $T^k x \notin C$ pour tout $0 \leq k \leq K$, et en particulier pour tout $k = n+d, \cdots, m(n+d)$. Alors

$$\mu_\phi(G_C) \leq \sum_{D_0,\ldots,D_m} \mu_\phi(D_0 \cap \sigma^{-n+d} D_1 \cap \cdots \cap \sigma^{-m(n+d)} D_m).$$

D'après le théorème 3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_\phi(G_C) &\leq (1+c\beta^d)^{m+1} \sum_{D_0,\ldots,D_m} \prod_{i=0}^{m} \mu_\phi(\sigma^{-i(n+d)} D_i) \\
&= \left[(1+c\beta^d)(1-\min_{C_i} \mu_\phi(C_i))\right]^m \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{2}\min_{C_i} \mu_\phi(C_i)\right)^m.
\end{aligned}$$

Sommons sur les $L(\leq 2^n)$ intervalles C possibles. On a

$$\begin{aligned}
&\mu_\phi\{x : \exists C \in \{C_i\} \text{ tel que } \tau_n(x,C) > K\} \\
&\qquad \leq \sum_C \mu_\phi(G_C) \\
&\qquad \leq L\left(1 - \frac{1}{2}\min_{C_i} \mu_\phi(C_i))\right)^m \\
&\qquad \leq L\left(1 - \frac{1}{2}\min_{C_i} \mu_\phi(C_i))\right)^{2^{\gamma n}/(\min_{C_i} \mu_\phi(C_i)(1+\omega)n)} \\
&\qquad \leq const \cdot 2^n \cdot \left(e^{-1/2}\right)^{2^{\gamma n}/(1+\omega)n} \\
&\qquad \leq 2^{-\lambda n}
\end{aligned}$$

pour n suffisamment grand. $\square$

Références

[1] M. Arbeiter and N. Patzschke, «Random self-similar multifractals», *Math. Nachr.* **181** (1996), p. 5–42.

[2] A. Arneodo, E. Bacry, J.-F. Muzy, «Random cascades on wavelet dyadic trees», *J. Math. Phys.* **39** (1998), p. 4142–4264.

[3] P. Assouad, «Plongements Lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$», *Bull. Sci. Math. Fr.* **111** (1983), p. 429–448.

[4] E. Bacry and J.-F. Muzy, «Log-infinitely divisible multifractal processes», *Commun. Math. Phys.* **236** (2003), p. 449–475.

[5] B. von Bahr and C.-G. Esseen, «Inequalities for the r^{th} absolute momen of sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$», *Ann. Math. Statist.* **36** (1965), p. 299–303.

[6] J. Barral, «Moments, continuité, et analyse multifractale des martingales de Mandelbrot», *Probab. Theory Relat. Fields* **113** (1999), p. 535–569.

[7] J. Barral, «Continuity of the multifractal spectrum of a random statistically self-similar measure», *J. Theoretic. Probab.* **13** (2000), p. 1027–1060.

[8] J. Barral, «Poissonian products of random weights : uniform convergence and related measures», *Rev. Math. Ibero-americana* **19** (2003), p. 813–856.

[9] J. Barral, F. Ben Nasr, J. Peyrière, «Comparing multifractal formalisms : the Neighboring Boxes Conditions», *Asian, J. Math.* **7** (2003), p. 149–166.

[10] J. Barral, M.O. Coppens and B. Mandelbrot, «Multiperiodic multifractal martingale measures», *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), p. 1555–1589.

[11] J. Barral and A.H. Fan, «Covering numbers of different points in the Dvoretzky covering», *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), p. 275–317.

[12] J. Barral and D.J. Feng, «Weighted thermodynamic formalism and applications». arXiv :math/0909.4247v1.

[13] J. Barral, X. Jin, «Multifractal analysis of complex random cascades», accepté pour publication dans *Commun. Math. Phys.*

[14] J. Barral and B.B. Mandelbrot, «Multifractal products of cylindrical pulses», *Probab. Theory Relat. Fields* **124** (2002), p. 409–430.

[15] J. Barral and B. Mandelbrot, «Random Multiplicative Multifractal Measures, I, II, III», in M. Lapidus, M. van Frankenhuijsen, eds., Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. **72**, No.2, p. 3–90, 2004.

[16] J. Barral, M. Mensi, «Gibbs measures on self-affine Sierpinski carpets and their singularity spectrum», *Ergod. Th. & Dynam. Syst.* **27** (2007), p. 1419–1443.

[17] J. Barral, M. Mensi, «Multifractal analysis of Birkhoff averages on "self-affine" symbolic spaces», *Nonlinearity*, **21** (2008), p. 2409–2026.

[18] J. Barral, J. Peyrière et Z.-Y. Wen, «Dynamics of Mandelbrot cascades», *Probab. Th. Relat. Fields*, **144** (2009), p. 615–631.

[19] J. Barral, S. Seuret, «From multifractal measures to multifractal wavelet series», *J. Fourier Anal. Appl.* **11** (2005), p. 589–614.

[20] J. Barral, S. Seuret, «Sums of Dirac masses and conditioned ubiquity», *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, **339** (2004), p. 787–792.

[21] J. Barral, S. Seuret, «Combining multifractal additive and multiplicative chaos», *Commun. Math. Phys.* **257** no.2 (2005), p. 473–497.

[22] J. Barral, S. Seuret, «Heterogeneous ubiquitous systems in $\mathbb{R}^d$ and Hausdorff dimension», *Bull. Braz. Math. Soc.* **38** no. 3 (2007), p. 467–515.

[23] J. Barral and S. Seuret, «The singularity spectrum for the inverse of cookie-cutters», *Ergod. Th. & Dynam. Syst*, **29** (2009), p. 1075–1095.

[24] L. Barreira, «A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems», *Ergod. Theory & Dynam. Sys.*, **16** (1996), p. 871–927.

[25] L. Barreira, Y. Pesin, J. Schmeling, «On a general concept of multifractality : multifractal spectra for dimensions, entropies, and Lyapunov exponents. Multifractal rigidity» *Chaos* **7** (1997), p. 27–38.

[26] L. Barreira, B. Saussol, «Multifractal analysis of hyperbolic flows», *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), p. 339–371.

[27] L. Barreira, B. Saussol and J. Schmeling, «Higher dimensional multifractal analysis», *J. Math. Pure. Appl.* **81** (2002), p. 67–91.

[28] L. Barreira, B. Saussol and J. Schmeling, «Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis», *J. Number Theory* **97** (2002), p. 410–438.

[29] L. Barreira, «Nonadditive thermodynamic formalism : equilibrium and Gibbs measures», *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **16** (2006), p. 279–305.

[30] L. Barreira and C. Valls, «Multifractal structure of two-dimensional horseshoes», *Comm. Math. Phys.* **266** (2006), p. 455–470.

[31] F. Ben Nasr, I. Bhouri, and Y. Heurteaux, «The validity of the multifractal formalism : results and examples.», *Adv. in Math.* **165** (2002), 264–284.

[32] V. Beresnevich and S. Velani, «A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures», *Ann. Math.* **164** (2006), p. 971–992.

[33] J. Berestycki, «Multifractal spectra of fragmentation processes», *J. Stat. Phys.* **113** (2003), no. 3/4, p. 411–430.

[34] J.D. Biggins, «Uniform convergence of martingales in the branching random walk», *Ann. Prob.* **20** (1992), p. 137–151.

[35] P. Billard, «Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes», *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **82** (1965), p. 131–179.

[36] J. Bourgain, «On the spectral type of Ornstein's class one transformation», *Israel J. Math.* **84** (1993), p. 53–63.

[37] R. Bowen, «Topological entropy for noncompact sets», *Trans. Amer. Math. Soc.* **184** (1973), p. 125–136.

[38] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[39] G. Brown and W. Moran, «A dichotomy for infinite convolutions of dicrete measures», *Proc. Camb. Phil. Soc.* **73** (1973), p. 307–316.

[40] G. Brown, G. Michon and J. Peyrière, «On the multifractal analysis of measures», *J. Statist. Phys.* **66** (1992), p. 775–790.

[41] G. Brown and W. Moran, «On orthogonality for Riesz products», *Proc. Camb. Phil. Soc.* **76** (1974), p. 173–181.

[42] Y. Bugeaud, «A note on inhomogeneous Diophantine approximation», *Glasgow Math. J.* **45** (2003), p. 105–110.

[43] Y. Bugeaud, «Sets of exact approximation order by rational numbers», *Math. Ann.* **327** (2003), p. 171–190.

[44] L. Carleson «On the support of harmonic measure for sets of Cantor type», *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **10** (1985), p. 113–123.

[45] R. Cawley and R.D. Mauldin, «Multifractal decompositions of Moran fractals», *Adv. Math.* **92** (1992), p. 196–236.

[46] P. Chainais, R. Riedi and P.Abry, «On non-scale-invariant infinitely divisible cascades», *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** (2005) no. 3, p. 1063–1083.

[47] Y.-L. Cao, D. J. Feng, W. Huang, «The thermodynamic formalism for sub-additive potentials», *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **20** (2008), p. 639–657.

[48] P. Collet, J.L. Lebowitz, A. Porzio, «The dimension spectrum of some dynamical systems», *J. Stat. Phys.* **47** (1987), p. 609–644.

[49] C. Cutler, «Connecting ergodicity and dimension in dynamical systems», *Ergodic Theory Dynam. Systems* **118** (1995), p. 393–410.

[50] K. Dajani and C. Kraaikamp, *Ergodic Theory of Numbers*, Carus Mathematical Monographs, AMS, 2002.

[51] R.O. Davies, «Increasing sequences of sets and Hausdorff measure», *Proc. London Math. Soc.* **20** (1970) no.3, p. 222–236.

[52] J. Dixmier, J.-P. Kahane, J.-L. Nicolas, «Un exemple de non-dérivabilié en géométrie du triangle», *Ens. Math.* **53** (2007) no 2, p. 369–428.

[53] M.M. Dodson, M.V. Melián, D. Pestana and S.L. Vélani, «Patterson measure and Ubiquity», *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Ser. A I Math. **20** (1995), p. 37–60.

[54] N. Dunford and J. Schwarz, *Linear operattors*, Wiley, 1958.

[55] J.L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Springer-Verlag, 1984.

[56] A. Dvoretzky, «On covering a circle by randomly placed arcs», *Pro. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956), p. 199–203.

[57] A. Durand, «Ubiquitous systems and metric number theory», *Adv. Math.*, **218** (2008), p. 368–394.

[58] G. A. Edgar and R. D. Mauldin, «Multifractal decompositions of digraph recursive fractals», *Proc. London Math. Soc.* **65** (1992), p. 604–628.

[59] K. J. Falconer, «The Hausdorff dimension of some fractals and attractors of overlapping construction», *J. Statist. Phys.* **47** (1987), p. 123–132.

[60] K. J. Falconer, «The Hausdorff dimension of self-affine fractals», *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **103** (1988), no. 2, p. 339–350.

[61] K. J. Falconer, «A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers», *J. Phys. A*, **21** (1988), no. 14, L737–L742.

[62] K. J. Falconer, «Dimensions and measures of quasi self-similar sets», *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106** (1989), no. 2, 543–554.

[63] K. J. Falconer, «The multifractal spectrum of statistically self-similar measures», *J. Theor. Prob.* **7** (1994), p. 681–702.

[64] K. J. Falconer, «Generalized dimensions of measures on self-affine sets», *Nonlinearity* **12** (1999), no. 4, 877–891.

[65] K. J. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, 2nd Edition. Wiley, 2003.

[66] A.H. Fan, «Chaos additifs et chaos multiplicatifs de Lévy», *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér.I. **308** (1989), p. 151–154.

[67] A.H. Fan, «Sur la convergence de séries trigonométriques lacunaires par rapport à des produits de Riesz», *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér.I. **309** (1989), p. 295–298.

[68] A.H. Fan, *Recouvrement aléatoire et décompositions de mesures*, Publication d'Orsay, 1989.

[69] A.H. Fan, «Sur quelques processus de naissance et de mort», *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér.I. **310** (1990), p. 441–444.

[70] A.H. Fan, «Equivalence et orthogonalité des mesures aléatoires engendrées par martingales positives homogènes», *Studia Math.* **98** (1991) no.3, p. 249–266.

[71] A.H. Fan, «Quelques propriétés de produits de Riesz», *Bull. Sci. Math.* **117** (1993) no. 3, p. 421–439.

[72] A.H. Fan, «Sur les dimensions de mesures», *Studia Math.* **111** (1994) no.1, p. 1–17.

[73] A.H. Fan, «On ergodicity and unidimensionality», *Kyushu J. Math.* **48** (1994) no.2, p. 249–255.

[74] A.H. Fan, «A proof of the Ruelle theorem», *Reviews Math. Phys.* **7** (1995) no. 8, p. 1241–1247.

[75] A.H. Fan, «Sur le chaos de Lévy d'indice $0 < \alpha < 1$», *Ann. Sc. Math. Québec* **21** (1997) no. 1, p. 53–66.

[76] A.H. Fan, «Multifractal analysis of infinite products», *J. Stat. Phys.* **86** (1997) nos.5/6, p. 1313–1336.

[77] A.H. Fan «Individual behaviors of oriented walks», *Stoc. Proc. Appl., Stoc. Proc. Appl.*, **90** (2000) p. 263–275.

[78] A.H. Fan, «On Markov-Mandelbrot martingales», *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), p. 967–982.

[79] A.H. Fan, «How many intervals cover a point in Dvoretzky covering ?», *Israël J. Math.* **131** (2002), p. 157–184.

[80] A.H. Fan and D.J. Feng, «On the distribution of long-term time averages on symbolic space», *J. Statist. Phys.* **99** (1999), p. 813–856.

[81] A.H. Fan, D.J. Feng and J. Wu, «Recurrence, dimension and entropy», *J. London. Math. Soc.* **64** (2001), p. 229–244.

[82] A.H. Fan and Y.P. Jiang, «On Ruelle-Perron-Frobenius operators. I. Ruelle's theorem and II. Convergence speed», *Commun. Math. Phys.* **223** (2001), p. 125–141 and p. 143–159.

[83] A.H. Fan and J.-P. Kahane, «Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire», *Ann. Inst. Henri Poincaré* **29** (1993) no. 3, p. 453–466.

[84] A.H. Fan and J.-P. Kahane, «Decomposition principle and random cascades», in Proceedings of ICCM2004, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, **42** (2008), p. 447–456.

[85] A.H. Fan and K.S. Lau, «Iterated function system and Ruelle operator», *J. Math. Anal. Appl.*, **231** (1999), p. 319–344.

[86] A.H. Fan, B. Li, and T. Lenglet, «Quantitative uniform hitting in exponentially mixing systems», *Proc. Conf. Fractal and related topics, Monastir.*

[87] A.H. Fan, L.M. Liao and J. Peyrière, «Generic points in systems of specification and Banach valued Birkhoff ergodic average», *Discrete and continuous dynamical systems* **21** (2008) no. 4, p. 1103–1128.

[88] A.H. Fan, L.M. Liao, B.W. Wang and J. Wu, «On Khintchine exponents and Lyapunov exponents of continued fractions», *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **29** (2009), p. 73–109.

[89] A.H. Fan and J. Schmeling, «On fast Birkhoff averaging», *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **135** (2003), p. 443–467.

[90] A.H. Fan, J. Schmeling and S. Troubetzkoy, «Dynamical Diophantine approximations», arXiv :0705.4203v1 (2007).

[91] A.H. Fan and J. Wu, «On the covering by small random Intervals», *Ann. Inst. Henri Poincaré* **40** (2004), p. 125–131.

[92] A.H. Fan and J. Wu, «A note on inhomogeneous diophantine approximation with a general error function», *Glasgow Math. J.* **48** (2006), p. 187–191.

[93] A.H. Fan and J.H. Zhang, «Absolute continuity of the distribution of some Markov geometric series», *Sciences in China*, **50**, No. 11 (2007) p. 1521–1528.

[94] A.H. Fan and X.Y. Zhang, «Some Properties of Riesz products on the ring of p-adic integers», *J. Fourier Anal. Appl.* **15** No. 4 (2009), p. 521–552. See also «Riesz products on the ring of p-adic integers», *C. R. Acad. Sci. Paris* (2007) no. 7, p. 425-430.

[95] D.J. Feng, «Smoothness of the L^q-spectrum of self-similar measures with overlaps», *J. London Math. Soc.* **68** (2003), p. 102–118.

[96] D.J. Feng, «Lyapounov exponents for products of matrices and multifractal analysis. Part I : positive matrices», *Israël J. Math.* **138** (2003), p. 353–376.

[97] D.J. Feng, «The variational principle for products of non-negative matrices», *Nonlinearity* **17** (2004), p. 447–457.

[98] D.J. Feng, «The limit Rademacher funcions and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers», *Adv. Math.* **195** (2005), p. 24–101.

[99] D.J. Feng, «Gibbs properties of self-conformal measures and the multifractal formalism», *Ergod. Th.* & *Dynam. Syst.* **27** (2007), p. 787–812.

[100] D.J. Feng, «Lyapunov exponents for products of matrices and Multifractal analysis. Part II : Non-negative matrices», *Israël J. Math.*, **170** (2009), p. 355-394.

[101] D.-J.Feng and H. Hu, «Dimension theory of iterated function systems», *Commun. Pure Appl. Math*, **62** (2009), p. 1435–1500.

[102] D.J. Feng and K.S. Lau, «Pressure Function for Products of Non-negative Matrices», *Math. Research Lett.* **9** (2002), p. 363–378.

[103] D.J. Feng and K.S. Lau, «Multifractal formalism for self-similar measures with weak separation condition», *J. Math. Pures Appl.*, **92**, No. 4, (2009), 407–428.

[104] D. J. Feng, K.S. Lau and X.-Y. Wang, «Some exceptional phenomena in multifractal formalism. II.», *Asian J. Math.* **9** (2005), p. 473–488.

[105] D.J. Feng, K.-S. Lau and J. Wu, «Ergodic limits on the conformal repellers», *Adv. Math.* **169** (2002), p. 58–91.

[106] D.J. Feng and E. Olivier, «Multifractal analysis of the weak Gibbs measures and phase transition– Application to some Bernoulli convolutions», *Ergod. Th.* & *Dynam. Syst.* **23**, p. 1751–1784.

[107] P.J. Fitzsimmons, B.E. Fristedt and L.A. Shepp, «The set of real numbers left uncovered by random covering intervals», *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70** (1985), p. 175–189.

[108] U. Frisch and G. Parisi, «Fully developped turbulence and intermittency in turbulence, and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dymnamics», International school of physics "Enrico Fermi", course 88, edited by M. Ghil, North Holland (1985), p. 84.

[109] R. Güting, «On Mahler's function θ_1», *Michigan Math. J.* **10** (1963), p. 161–179.

[110] D. Gatzouras and S.P. Lalley, «On the Hausdorff and Box Dimensions of certain Self-Affine Fractals», *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1992), p. 533–568.

[111] S. Graf, R.D. Mauldin and S.C. Williams, *The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions*, Mem. Amer. Math. Soc. **71** no. 381, 1988.

[112] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadnoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, «Fractal measures and their singularities : the characterisation of strange sets», *Phys. Rev. A* **33** (1986), p. 1141.

[113] H.G. Hentschel and I. Procaccia, «The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors», *Physica 8D* (1983), p. 435.

[114] Y. Heurteaux, «Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures», *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **34** (1998), p. 309–338.

[115] Y.Heurteaux, «Dimension of measures : the probabilistic approach», *Publ. Mat.* **51** (2007), p. 243–290.

[116] E. Hewitt and H.S. Zuckerman, «Singular measures with absolutely continuous convolution squares», *Proc. Camb. Phil. Soc.* **62** (1966), p. 399–420.

[117] B. Host, J.-F. Méla and F. Parreau, *Analyse harmonique des mesures*, **135–136** *Astérisque*, 1986, 261pp.

[118] B. Host, J.-F. Méla and F. Parreau, «Non-singular transformations and spectral analysis of measures», *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), p. 33–90.

[119] R. Holley and E.C. Waymire, «Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random cascades, *Ann. Appl. Probab.* **2** (1992), p. 819–845.

[120] B. Host and F. Parreau, «Sur une notion de pureté pour les mesures», *C. R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), p. 409–412.

[121] J.D. Howroyd, *On the theory of Hausdorff measures in metric spaces*, Thesis, University fo London, 1994.

[122] J.E. Hutchinson, «Fractals and self-similarity», *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), p. 713–747.

[123] S. Jaffard, «Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes», *C. R. Acad. Sci. Paris* Série I **308** (1989), p. 79–81.

[124] S. Jaffard, «Multifractal formalism for functions. I. Results valid for all functions. II. Self-similar functions», *SIAM J. Math. Anal.* **28** (1997), p. 944–970 and p. 971–998.

[125] S. Jaffard, «On lacunary wavelet series», *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000) no. 1, p. 313–329.

[126] S. Jaffard, «Wavelets techniques in multifractal analysis», in M. Lapidus, M. van Frankenhuijsen, eds., Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* Vol. **72**, Part 2, 91–151, 2004.

[127] S. Janson, «Random coverings of the circle with arcs of random lengths», *Probability and mathematical statistics*, 62–73, Uppsala Univ., Uppsala, 1983.

[128] V. Jarnik, «Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass,» *Mat. Sbornik* **36** (1929), p. 371-381.

[129] T. Jordan and K. Simon, «Multifractal analysis for Birkhoff averages for some self-affine IFS», *Dyn. Sys.* **22** (2007), p. 469–483.

[130] J.-P. Kahane, *Some series of functions*, Cambridge University Press, 1985.

[131] J.-P. Kahane, «Sur le chaos multiplicatif», *Ann. Sciences Math. Québec* **9** (1985), p. 105–150.

[132] J.-P. Kahane, «Positive martingales and random measures», *Chin. Ann. Math.* **8B** (1) (1987) no.1, p. 1–12.

[133] J.-P. Kahane, «Intervalles aléatoires et décomposition des mesures», *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér.I. **304** (1987), p. 551–554.

[134] J.-P. Kahane, «Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff», *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.*, **23** (1987), p. 289C-296.

[135] J.-P. Kahane, «From Riesz product to random sets», In Harmonic analysis, ICM-90 satellite conference proceedings (Sendai 1990), ed. S. Igari, Springer-Verlag, 1991, p. 125-139.

[136] J.-P. Kahane, «Produits de poids aléatoires indépendants et applications», in Fractal geometry and analysis (Montreal, PQ, 1989), 277–324, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **346**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

[137] J.-P. Kahane, «Random covering and multiplicative processes», in Fractal Geometry and Stochastics II, p. 125–146, *Progress in Probability* vol. **46**, Ed. Ch. Bandt, S. Graf and M. Zähle, Birkhäuser Verlag, 2000.

[138] J.-P. Kahane and J. Peyrière,«Sur certaines martingales de Mandelbrot», *Advances in Math.* **22** (1976), p. 131–145.

[139] J.-P. Kahane and R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, Hermann 1963.

[140] S. Kakutani, «On equivalence of infinite product measures», *Ann. Math.* **49** (1948), p. 214–224.

[141] Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic analysis*, New York, John Wiley 1968.

[142] R. Kaufman, «A "min-max" theorem on potentials», *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. I Math. **319** (1994) no.8, p. 799–800.

[143] M. Keane, «Strongly mixing g-measures», *Invent. Math.* **16** (1972), p. 309–324.

[144] R. Kenyon and Y. Peres, «Measures of full dimension on affine-invariant sets», *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **16** (1996), p. 307–323.

[145] M. Kesseböhmer, «Large deviation for weak Gibbs measures and multifractal spectra», *Nonlinearity* **14** (2001), p. 395–409.

[146] K. Khanin and Y. Kifer, «Thermodynamic formalism for random transformations and statistical mechanics», *Amer. Math. Soc. Transl.* **171** (1996) no.2, p. 107–140.

[147] Y. Kifer, «Equilibrium states for random expanding transformations», *Random and Comput. Dyn.* **1** (1992), p. 1–31.

[148] S.J. Kilmer and S. Saeki, «On Riesz product measures : mutual absolute continuity and singularity», *Ann. Inst. Fourier* **38** (1988), p. 63–93.

[149] J.F. King, «The singularity spectrum for general Sierpinski carpets», *Adv. Math.* **116** (1995), p. 1–8.

[150] J. F. C. Kingman, «The ergodic theory of subadditive stochastic processes», *J. Royal Stat. Soc.* **B30** (1968), p. 499–510.

[151] A.N. Kolmogorov, «Précisions sur la structure locale de la turbulence dans un fluide visqueux aux nombres de Reynolds élevés», Mécanique de la trubulence», Colloq. intern. CNRS Marseille 1961, Editions CNRS 1962, p. 447–451.

[152] T. Langlet, «Thèse», Université de Picardie, 2009.

[153] K.S. Lau and S.-M. Ngai, «Multifractal measures and a weak separation condition», *Adv. Math.* **141** (1999), p. 45–96.

[154] K.S. Lau and S.-M. Ngai, «L^q-spectrum of Bernoulli convolutions associated with P.V. numbers», *Osaka J. Math.* **36** (1999), p. 993 –1010.

[155] K.S. Lau and X.-Y. Wang, «Some exceptional phenomena in multifractal formalism I.», *Asian J. Math.* **9** (2005), p. 275–294.

[156] F. Ledrappier, «Des produits de Riesz comme mesures spectrales», *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6** (1970) no. 4, p. 335–344.

[157] P.-G. Lemarié and Y. Meyer, «Ondelettes et bases hilbertiennes», *Rev. Mat. Iberoamericana* **1** (1986), p. 1–18.

[158] J. Lévy Véhel and R. Vojak, «Multifractal analysis of Choquet capacities», *Adv. in Appl. Math.* **20** (1998), p. 1–43.

[159] Q. Liu, «Sur une équation fonctionnelle et ses applications : une extension du théorème de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement», *Adv. Appl. Prob.* **29** (1997), p. 353–373.

[160] Q. Liu, «Asymptotic Properties and Absolute Continuity of Laws Stable by Random Weighted Mean», *Stochastic Processes and their Applications*, **95** (2001), p. 83–107.

[161] R. Lyons, «Random walks and percolation on trees», *Ann. Probab.* **18** (1990), p. 931–958.

[162] R. Lyons, «Random walks, capacity and percolation on trees», *Ann. Probab.* **20** (1992), p. 2043–2088.

[163] N.G. Makarov, «Fine structure of harmonic measure», *St. Petersburg Math. J.* **10** (1999), p. 217–268.

[164] B. Mandelbrot, «Possible refinement of the log-normal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent trubulence in statistical models and trubulence», Symposium at U. C. San Diego 1971, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag 1972, p. 333–351.

[165] B. Mandelbrot, «Renewal sets and random cutouts», *Z. Wahrsch. v. Geb.* **22** (1972), p. 145–157.

[166] B.B. Mandelbrot, «On Dvoretzky coverings for the circle», *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **22** (1972), p. 158–160.

[167] B. Mandelbrot, «Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyennes pondérée aléatoire», *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), p. 289–292.

[168] B. Mandelbrot, «Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyennes pondérée aléatoire : quelques extensions», *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), p. 355–358.

[169] B. Mandelbrot, «Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of hight moments and dimension of the carrier», *J. Fluid. Mech.* **62** (1974), p. 331–358.

[170] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[171] McMullen C, «The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets», *Nagoya Math. J.* **96** (1984), p. 1–9.

[172] G. Michon, «Une construction des mesures de Gibbs sur certains ensembles de Cantor», *C. R. Acad. Sci. Paris* Série I **305** (1987), p. 689–692.

[173] G. Michon, «Mesures de Gibbs sur les Cantor réguliers», *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **58** (1993), p. 267–285.

[174] G. M. Molchan, «Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades», *Commun. Math. Phys.* **179** (1996), p. 681–702.

[175] A. Mummert, «The thermodynamic formalism for almost-additive sequences», *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **16** (2006), 435–454.

[176] M. G. Nadkarni, *Spectral theory of dynamical systems*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks] Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[177] S.-M. Ngai, «A dimension result arising from the L^q-spectrum of a measure», *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), p. 2943–2951.

[178] E.A. Novikov and R.W. Stewart, «Intermittence of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy diddipation», *Isvestia Akademii Nauk SSR Earia Geofizicheskaia* **3** (1964), p. 408–413.

[179] S.-Z. Ngai and Y. Wang, «Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps», *J. London Math. Soc.* **63** (2001), p. 655–672.

[180] N.T. Nguyen, «Iterated function systems of finite type and the weak separation condition», *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), p. 483–487.

[181] E. Olivier, «Dimension de Billingsley d'ensembles saturés», *C. R. Acad. Sci. Paris* Ser. I **328** (1999), p. 13–16.

[182] E. Olivier, «Multifractal analysis in symbolic dynamics and distribution of pointwise dimension for g-measures», *Nonlinearity* **12** (1999), p. 1571–1585.

[183] E. Olivier, N. Sidorov and A. Thomas, «On the Gibbs properties of Bernoulli convolutions related to β-numeration in multinacci bases», *Monatsh. Math.* **145** (2005), p. 145–174.

[184] L. Olsen, *Random geometrically graph directed self-similar multifractals*, Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. **307**, 1994.

[185] L. Olsen, «A multifractal formalism», *Adv. Math.* **116** (1995), p. 92–195.

[186] L. Olsen, «Self-affine multifractal Sierpinski sponges in $\mathbb{R}^d$», *Pacific J. Math.*, **183** (1998), p. 143–199.

[187] S. Orey and S. J. Taylor, «How often on a Brownian path does the law of iterated logarithm fail ?», *Proc. London Math. Soc.* **28** (1974), p. 174–192.

[188] F. Parreau, «Ergodicité et pureté des produits de Riesz», *Ann. Inst. Fourier* **40** (1990), p. 391–405.

[189] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187-188** (1990), 284 pages.

[190] N. Patzschke, «Self-conformal multifractal measures», *Adv. in Appl. Math.*, **19** (1997), no. 4, 486–513.

[191] Y. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems : Contemporary views and applications*, Chicago lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1997.

[192] Y. Pesin and H. Weiss, «The multifractal analysis of Gibbs measures : Motivation, mathematical foundation, and examples», *Chaos*, **7** (1997), p. 89–106.

[193] Y. Pesin and H. Weiss,«The multifractal analysis of Birkhoff averages and large deviation», in "Global Analysis of Dynamical Systems", Inst. Phys., Bristol, (2001), p. 419–431

[194] Y. Peres, «Probability on Trees : An Introductory Climb», in Lecture Notes in Math **1717**, (1999), p. 193–280.

[195] J. Peyrière, «Sur les produits de Riesz», *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), p. 1417–1419.

[196] J. Peyrière, «Étude de quelques propriétés des produits de Riesz», *Ann. Inst. Fourier* **25** (1975), p. 127–169.

[197] J. Peyrière, «A Singular Random Measure Generated by Spliting $[0, 1]$», *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **47** (1979) no. 3, p. 289–297.

[198] J. Peyrière,«Almost everywhere convergence of lacunary trigonometric series with respect to Riesz products», *Australian J. Math.* (Series A) **48** (1990), p. 376–383.

[199] J. Peyrière, «Recent results on Mandelbrot multiplicative cascades», in Fractal Geometry and Stochastics II, pp. 147–159, Progress in Probability vol. 46, Ed. Ch. Bandt, S. Graf and M. Zähle, Birkhäuser Verlag, 2000.

[200] J. Peyrière, «A Vectorial Multifractal Formalism», *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **72.2** (2004), 217–230.

[201] M. Pollicott and H. Weiss, «The dimensions of some self-affine limit sets in the plane and hyperbolic sets», *J. Stat. Phys.* **77** (1994), p. 841–866.

[202] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems : Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. **1294**, 1987.

[203] D.A. Rand, «The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters», *Ergod. Th. & Dynam. Syst.* **9** (1989), p. 527–541.

[204] F. Riesz, «Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen funktion von beschränkter Schwankung», *M. Z.* **2** (1918), p. 312–315.

[205] W. Rudin, *Fourier analysis on groups.* Interscience Tract n° 12, Wiley, New York. 1962.

[206] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **5**, Addison-Weysley, 1978.

[207] L. Shepp, «Covering the circle with random arc», *Israel J. Math.* **11** (1972), p. 328–345.

[208] L. Shepp, «Covering the line with random arc», *Z. Wahrsch. v. Geb.* **23** (1972), p. 163–170.

[209] A. Schief, «Separation properties for self-similar sets», *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122** (1994), 111–115.

[210] P. Shmerkin, «A modified multifractal formalism for a class of self-similar measures with overlap», *Asian J. Math.* **9** (2005), p. 323–348.

[211] J. Schmeling and S. Troubetzkoy, «Inhomogeneous Diophantine approximation and angular recurrence for polygonal billiards», *Mat. Sbornik* **194** (2003), p. 295–309.

[212] N. Shieh and X.Y. Zhang, «Random p-adic Riesz products : Continuity, singularity, and dimension»*Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), p. 3477–3486.

[213] B. Solomyak, «Measure and dimension for some fractal families», *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **124** (1998), p. 531–546.

[214] F. Takens and E. Verbitskiy, «On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets», *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **23** (2003) no. 1, p. 317–348.

[215] M. Tamashira, «Dimensions in a separable metric space», *Kyushu J. Math.* **49** (1995) no. 1, p. 143–162.

[216] A. A. Tempelman, «Multifractal analysis of ergodic averages : a generalization of Eggleston's theorem», *J. Dynam. Control Systems* **7** (2001), p. 535–551.

[217] B. Testud, «Mesures quasi-Bernoulli au sens faible : résultats et exemples», *Ann. Inst. Poincaré Probab. Stat.* **42** (2006), p. 1–35.

[218] B. Testud, «Phase transitions for the multifractal analysis of self-similar measures», *Nonlinearity* **19** (2006), p. 1201–1217.

[219] C. Tricot Jr, «Two definitions of fractional dimension», *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **91** (1982), p. 57–74.

[220] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich and E.I. Zelenov, *P-adic analysis and mathematical physics.* World Scientific, 1994.

[221] J.L. Walsh, «A closed set of normal orthogonal functions», *American J. Math.* **45** (1923), p. 5–24.

[222] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, GTM 79. New York, Springer-Verlag, 1982.

[223] E.C. Waymire and S.C. Williams, «Multiplicative cascades : dimension spectra and dependence», in Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993). *J. Fourier Anal. Appl.* Special Issue (1995), p. 589–609.

[224] G. de Wijs, «Statistics of ore distribution», *Geologie en Minjbouw (Amsterdam)* **13** (1951), p. 365–375 et **15** (1953), p. 12–24.

[225] A.M. Yaglom, «The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval», *Doklady Akademii Nauk SSSR* **16** (1966), p. 49–52.

[226] L.S. Young, «Dimension, entropy and Lyapounov exponents», *Erg. Th. Dynam. Syst.* **2** (1982), p. 109–124.

[227] M. Zinsmeister, *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, Panoramas et Synthèses, **4** SMF, Paris, 1996.

[228] A. Zygmund, «On lacunary trigonometric series», Trans. AMS. **34** (1932), p. 435–446.

[229] A. Zygmund, *Trigonometric series.* Cambridge University Press (1968).

Julien Barral, Aihua Fan et Jacques Peyrière