



SUBSTITUTIONS ALÉATOIRES ITÉRÉES

Author(s): Jacques PEYRIÈRE

Source: *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, (1980-1981), pp. 1-9

Published by: Société Arithmétique de Bordeaux

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/44166375>

Accessed: 16-03-2018 22:06 UTC

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <http://about.jstor.org/terms>



JSTOR

Société Arithmétique de Bordeaux is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

SUBSTITUTIONS ALÉATOIRES ITÉRÉES

par

Jacques PEYRIÈRE

-:-:-:-

Pour étudier simultanément plusieurs constructions de B. Mandelbrot ([3] à [6]) nous avons introduit [9] ce que nous avons appelé les systèmes de Mandelbrot (M-systèmes). Ils définissent un nouveau type de processus de naissance. Dans le cas ici traité, ces processus sont des chaînes de Markov dont les états successifs sont des mots : en passe d'un mot au suivant en remplaçant au hasard chacune de ses lettres par un mot. On autorise, en outre, une certaine dépendance entre les substitutions de lettres voisines. Le résultat démontré ici concerne l'estimation asymptotique, presque sûre et en moyenne quadratique, du nombre d'occurrences d'un mot déterminé dans le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite. Dans [9] on étudie des M-systèmes plus généraux qui engendrent des graphes colorés au lieu de mots.

1. - Les M-systèmes

Soit A un ensemble fini que nous appellerons alphabet. L'ensemble des mots non vides formés avec A est noté A^+ .

On considère une partie \mathcal{L} de A^+ , stable par passage aux sous-mots et l'on se donne un système $(\Omega_w, p_w)_{w \in \mathcal{L}}$ d'espaces probabilisés dénombrables, projectif dans le sens suivant : si w' est un sous-mot de w , on se donne aussi une application $r_{w',w}$ (dépendant non seulement de w et w' mais aussi de la position de w' dans w) telle que l'image de p_w par $r_{w',w}$ soit $p_{w'}$. On suppose aussi que l'on a $r_{w'',w'} \circ r_{w',w} = r_{w'',w}$ chaque fois que w'' est un sous-mot de w' , lui-même sous-mot de w . Enfin, pour chaque lettre a , on se donne une application g_a de Ω_a dans \mathcal{L} .

Si $w = a_1 a_2 \dots a_\nu$ est un mot appartenant à \mathcal{L} , on définit une application g_w de Ω_w dans A^+ ainsi : $g_w(w)$ est la concaténation des mots $\{g_{a_j} \circ r_{a_j, w}^{(w)}\}_{1 \leq j \leq \nu}$.

Nous supposons que les données précédentes sont telles que, pour tout w , l'image de g_w soit contenu dans \mathcal{L} . Dans ces conditions, on dira que l'on a défini un M-système.

Un M-système définit une probabilité de transition Q sur $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$: $Q(w, w') = p_w(g_w^{-1}(w'))$. La chaîne de Markov stationnaire ayant Q pour probabilité de transition sera notée $\{X_n\}_{n \geq 0}$. La probabilité sur les trajectoires issues de X_0 sera notée \mathbb{P}_{X_0} et l'espérance correspondante \mathbb{E}_{X_0} .

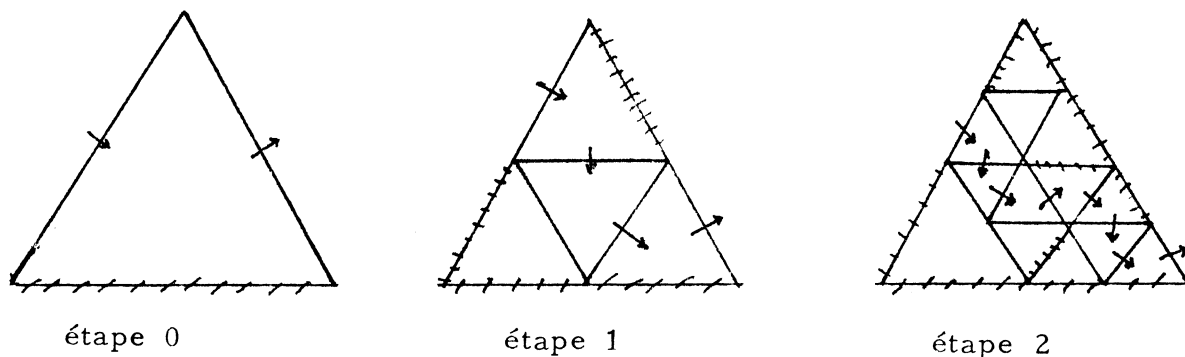
2. - Exemples

1) Une substitution $\sigma : A \rightarrow A^+$ définit un M-système : pour tout mot w , Ω_w est réduit à un seul élément et $g_a = \sigma(a)$.

2) Donnons-nous, pour chaque a dans A , un espace probabilisé dénombrable (Ω_a, p_a) . A chaque mot $w = a_1 a_2 \dots a_\nu$, on associe l'espace probabilisé $(\Omega_w, p_w) = \prod_{1 \leq j \leq \nu} (\Omega_{a_j}, p_{a_j})$. Les applications $r_{w',w}$ sont les projections. On obtient ainsi un système projectif. Dans ces conditions, les substitutions de deux lettres distinctes d'un même mot sont indépendantes.

3) Voici une des constructions de B. Mandelbrot ayant motivé l'introduction des M-systèmes. On part d'un triangle T_0 dont on distingue deux des côtés, l'un est le côté d'entrée, l'autre celui de sortie. On sélectionne au hasard et indépendamment une moitié de chacun de ces côtés. Pour joindre, en passant par l'intérieur de T_0 , les deux moitiés sélectionnées, on est amené à traverser un ou trois des quatre triangles homothétiques de T_0 dans le rapport $1/2$ et qui le pavent. Chacun des triangles traversés est naturellement muni de côtés d'entrée et de sortie. On remplace T_0 par le ou les triangles traversés et l'on répète l'opération précédente indéfiniment, étant entendu que l'on sélectionne la même moitié d'un segment qu'il soit considéré comme côté de sortie d'un triangle ou côté d'entrée d'un autre. A part cela, tous les choix sont indépendants et faits selon la même loi. Il s'agit d'un processus de naissance : un triangle en engendre un ou trois ; de plus deux triangles voisins interagissent. Nous ne détaillons pas de M-système le décrivant (on peut en utiliser un qui agisse sur un alphabet à deux lettres).

Voici une figure qui illustre la construction précédente.



Dans [9] on trouve plus de détails et d'autres exemples. Enfin nous rencontrerons d'autres M-systèmes dans les démonstrations qui suivent.

3. - Résultats

Considérons un M -système. Nous noterons E_w l'espérance associée à p_w . Nous ferons les hypothèses suivantes :

H. 1. - Pour tout a dans A , $E_a(|g_a|^2)$ est fini ($|w|$ désigne la longueur du mot w).

H. 2. - Il existe un entier ℓ , positif ou nul, tel que, quel que soit le mot w , concaténation des mots $\{w_j\}_{1 \leq j \leq 2n-1}$ tels que la longueur de chacun des w_{2j} soit supérieure ou égale à ℓ , les variables $\{r_{w_{2j-1}, w}\}_{1 \leq j \leq n}$ définies sur (Ω_w, p_w) soient indépendantes.

Si w est un mot, $L(w)$ désigne le vecteur de \mathbb{R}^A dont la composante correspondant à a est le nombre de fois que a figure dans w . On note M la matrice, indexée par $A \times A$, dont la colonne correspondant à a est $E_a(L \circ g_a)$. On adopte la terminologie de [10] en ce qui concerne les matrices à coefficients positifs.

Avec ces notations on a $E_w(L \circ g_w) = M L(w)$, d'où :

$$\mathbb{E}_{X_0} (L \circ X_{n+1}) \parallel X_n = M L(X_n).$$

H. 3. - On suppose que l'on a une partition $A = A_1 \cup A_2$ telle que la décomposition correspondante de M en blocs soit de la forme $\begin{pmatrix} S & T \\ O & U \end{pmatrix}$. On suppose en outre que la matrice S est primitive (c'est-à-dire, pour un k convenable, aucun coefficient de S^k n'est nul) et que sa valeur propre de Perron-Frobenius ρ est strictement supérieure à 1 et aux modules des valeurs propres de U .

On désigne par ξ le vecteur propre de M , associé à ρ , dont la somme $|\xi|$ des composantes est égale à 1.

THÉORÈME 1. - Sous les hypothèses H. 1, H. 2 et H. 3, pour tout a dans A_1 , il existe une variable aléatoire Z telle que $\rho^{-n} L(X_n)$ tende \mathbb{P}_a -presque sûrement et en moyenne quadratique vers $Z\xi$. De plus la variable aléatoire Z est \mathbb{P}_a -presque sûrement non nulle.

Désignons par B_k l'ensemble des mots de longueur k qui peuvent apparaître avec une probabilité non nulle dans la descendance d'une lettre de A_1 . Si w est un mot, $L^{(k)}(w)$ désigne le vecteur de \mathbb{R}^{B_k} dont la composante correspondant à w' est le nombre de fois que w' figure dans w . On note M_k la matrice indexée par $B_k \times B_k$ dont le terme correspondant à (w', w) est l'espérance par rapport à p_w du nombre de mots égaux à w' qui figurent dans $g_w(\cdot)$ et dont la première lettre est engendrée par la première lettre de w .

THÉORÈME 2. - Sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, pour tout k , M_k a ρ pour valeur propre simple et si ξ_k désigne le vecteur propre associé tel que $|\xi_k| = 1$, alors, pour tout a dans A_1 , $\rho^{-n} L^{(k)}(X_n)$ converge \mathbb{P}_a -presque sûrement et en moyenne quadratique vers $Z \xi_k$.

La démonstration de la première assertion du théorème 1 fait l'objet des paragraphes 2 et 5, celle du théorème 2 est faite au paragraphe 6. L'assertion $\mathbb{P}_a(Z=0) = 0$ n'est pas démontrée ici.

Ces résultats sont à rapprocher de certains obtenus dans le cas déterministe [1].

4. - Changement d'alphabet

Nous avons déjà défini B_k . Notons B'_k l'ensemble des mots de k lettres qui apparaissent avec une probabilité non nulle à la fin de l'un des mots engendrés par une quelconque lettre de A_1 . On pose $A^{(k)} = B_k \cup (\bigcup_{1 \leq j < k} B'_j)$ et $A^{(1)} = A$.

A chaque mot $X = x_1 x_2 \dots x_\nu$ construit sur l'alphabet A , on associe un mot $\rho_k(X)$ construit sur l'alphabet $A^{(k)}$ par le procédé suivant :

si $|X| < k$, alors $\rho_k(X) = X$,
et si $|X| \geq k$, alors

$$\rho_k(X) = (x_1 x_2 \dots x_k) (x_2 x_3 \dots x_{k+1}) \dots (x_{\nu-k+1} x_{\nu-k+2} \dots x_\nu) (x_{\nu-k+2} x_{\nu-k+3} \dots x_\nu)$$

($\rho_k(X)$ est constitué de $\nu - k + 1$ éléments de B_k suivis d'un de B'_{k-1}).

Nous allons définir un M -système, opérant sur $A^{(k)}$, qui soit essentiellement équivalent au M -système de départ. On note \mathcal{L}_k l'ensemble des sous-mots des mots $\{\rho_k(X)\}_{X \in \mathcal{L}}$. A chaque $\rho_k(X)$ on associe l'espace probabilisé (Ω_X, p_X) et au mot $W = (x_1 x_2 \dots x_k)(x_2 x_3 \dots x_{k+1}) \dots (x_\nu x_{\nu+1} \dots x_{\nu+k-1})$ appartenant à \mathcal{L}_k on associe l'espace probabilisé (Ω_w, p_w) où $w = x_1 x_2 \dots x_\nu x_{\nu+1} \dots x_{\nu+k-1}$. Les applications $r_{W', W}$ sont des applications $r_{w', w}$ pour des w' et w convenablement choisis dans \mathcal{L} . Définissons maintenant les applications de génération $g_\alpha^{(k)}$ pour α dans $A^{(k)}$. Si α appartient à B_k , $g_\alpha^{(k)}(\cdot)$ est le mot obtenu en ne gardant dans $\rho_k(g_\alpha^{(k)}(\cdot))$ que les éléments de B_k dont la première lettre est engendrée par la première lettre de α . Si α appartient à $\bigcup_{1 \leq j < k} B'_j$, alors on pose $g_\alpha^{(k)} = \rho_k \circ g_\alpha$.

Nous venons, comme annoncé, de définir un M -système opérant sur $A^{(k)}$ et $\{\rho_k(X_n)\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov stationnaire dont la probabilité de transition est celle que définit ce M -système. Observons que, l'hypothèse H.2 étant satisfaite pour le M -système du départ, elle l'est aussi pour le nouveau en remplaçant l par $l+k-1$.

Notons M_k la matrice associée à ce M -système. A la partition $A^{(k)} = B_k \cup (\bigcup_{1 \leq j < k} B'_j)$ correspond une décomposition de \tilde{M}_k en blocs $\tilde{M}_k = \begin{pmatrix} M_k & M'_k \\ 0 & M''_k \end{pmatrix}$. La matrice M''_k est stochastique par rapport à ses

colonnes. La matrice M_k s'obtient en remplaçant chacun des éléments $m_{a,b}$ de la matrice M par une matrice dont la somme des éléments de chaque colonne est $m_{a,b}$. On en déduit que les valeurs propres de \tilde{M}_k sont en module inférieures à ρ .

Notons P_k le projecteur de $\mathbb{R}^{A^{(k)}}$ sur \mathbb{R}^{B_k} parallèlement à $\mathbb{R}^{A^{(k)} \setminus B_k}$. Si W appartient à \mathcal{L}_k , notons $L^k(W)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{A^{(k)}}$ décrivant la composition de W . On a, si X appartient à \mathcal{L} , $L^{(k)}(X) = P_k L^k(\rho_k(X))$.

5. - Estimation des moments d'ordre 2

Si $w = x_1 x_2 \dots x_\nu$ appartient à \mathcal{L} , on pose, si $\nu > 1$,

$$V_w = E_w(L \circ g_{x_1} \circ r_{x_1, w} \otimes L \circ g_{x_\nu} \circ r_{x_\nu, w} + L \circ g_{x_\nu} \circ r_{x_\nu, w} \otimes L \circ g_{x_1} \circ r_{x_1, w}) \\ - E_{x_1}(L \circ g_{x_1}) \otimes E_{x_\nu}(L \circ g_{x_\nu}) - E_{x_\nu}(L \circ g_{x_\nu}) \otimes E_{x_1}(L \circ g_{x_1})$$

et, si a appartient à A ,

$$V_a = E_a(L \circ g_a \otimes L \circ g_a) - E(L \circ g_a) \otimes E(L \circ g_a).$$

Si w a une longueur strictement supérieure à ℓ , l'hypothèse H.2 entraîne que V_w est nul.

On a :

$$E_X(L \circ g_X \otimes L \circ g_X) = M \otimes M L(X) \otimes L(X) + \sum_{1 \leq k \leq \ell} \sum_{w \in B_k} V_w L_w^{(k)}(X),$$

ce que nous écrirons de la façon suivante :

$$E_X(L \circ g_X \otimes L \circ g_X) = M \otimes M L(X) \otimes L(X) + \sum_{1 \leq k \leq \ell} V^k \cdot L^{(k)}(X).$$

On obtient

$$\mathbb{E}_{X_0}(L(X_n) \otimes L(X_n)) = M^n \otimes M^n L(X_0) \otimes L(X_0) + \sum_{1 \leq k \leq \ell} \sum_{0 \leq j < n} (M \otimes M)^{n-j-1} V^k \cdot P_k \tilde{M}_k^j L^k(\rho(X_0))$$

$$(\text{on a, en effet, } \mathbb{E}_{X_0} L^k(\rho_k(X_n)) = \tilde{M}_k^n L^k(\rho_k(X_0)))$$

d'où, puisque l'on a $\rho^{-n} M^n = M' + O(\alpha^n)$ où α appartient à $]0, 1[$ et M' est un projecteur sur $M \xi$,

$$\rho^{-2n} \mathbb{E}_{X_0}(L(X_n) \otimes L(X_n)) = M' \otimes M' [L(X_0) \otimes L(X_0) + \sum_{1 \leq k \leq \ell} V^k \cdot P_k (I - \rho^{-2} M_k)^{-1} L^k(X_0)] \\ + O(\alpha^n).$$

La démonstration de la première assertion du théorème 1 se termine alors comme celle de Harris [2] relative aux processus de Galton-Watson à plusieurs types. On peut trouver une démonstration de la seconde assertion dans [7] ou [9].

6. - Etude spectrale des mots engendrés (théorème 2)

Le théorème 2 résulte de l'application du théorème 1 aux M-systèmes construits au paragraphe 4. On a simplement à démontrer qu'une certaine matrice S_k est primitive : $A_1^{(k)}$ est constitué des éléments de B_k dont la première lettre appartient à A_1 , $A_2^{(k)}$ est constitué des autres éléments de $A^{(k)}$, la décomposition correspondante de \tilde{M}_k étant $\tilde{M}_k = \begin{pmatrix} S_k & T_k \\ O & U_k \end{pmatrix}$.

Soit ν le plus petit entier tel que tout α de $A_1^{(k)}$ apparaisse avec une \mathbb{P}_{X_0} -probabilité non nulle dans l'un des termes de la suite $\{X_j\}_{1 \leq j \leq \nu}$ pour un X_0 appartenant à A_1 . Il est clair que, pour chaque α appartenant à $A_1^{(k)}$ il existe une lettre α dans A_1 telle que α figure, avec une \mathbb{P}_a -probabilité non nulle, comme sous-mot de X_ν . Observons que, si a_0 est un élément de A_1 , quel que soit N , il existe τ tel que, avec une \mathbb{P}_{a_0} -probabilité non nulle, X_τ contienne plus de N fois chaque lettre de A_1 (toutes les composantes de ξ indexées par A_1 sont en effet non nulles). On choisit N assez grand et l'on prend l'espérance de $L^k(\rho_k(X_{\tau+\nu}))$ par rapport à \mathbb{P}_{a_0} , ce qui montre que la matrice $S_k^{\tau+\nu}$ possède une colonne dont tous les éléments sont non nuls et donc que la matrice S_k est primitive.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COQUET J., KAMAE T. et MENDÈS FRANCE M., Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 369-384.
- [2] HARRIS T.E., Some mathematical models for branching processes, Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. Calif. Press, 1951.
- [3] MANDELBROT B., Fractals : Form, Chance and Dimension, Freeman and C°, 1977
- [4] MANDELBROT B., Les objets fractals, La Recherche 9, 85, 1-13.

- [5] MANDELBROT B., Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle : les cordonnets discrets et fractals, C.R.A.S. 286 (1978), 933-936.
- [6] MANDELBROT B., Fractal limits of random beadsets and geometric imbedding of birth processes, To appear
- [7] PEYRIÈRE J., Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction, IBM Research report R C-7417.
- [8] PEYRIÈRE J., Processus de naissance avec interaction des voisins, C.R.A.S. 289 (1979), 223-224 et 557.
- [9] PEYRIÈRE J., Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes, Ann. Inst. Fourier 31 (1981).
- [10] SENETA E., Non-négative matrices, J. Wiley (1973).

(texte reçu le 27 mai 1981)

--:--:--

Jacques PEYRIÈRE
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques - bât. 425
F 91405 ORSAY CEDEX